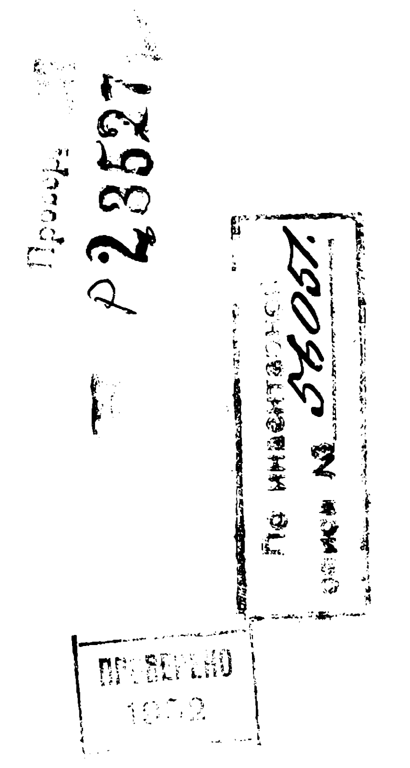
ИЗДАТЕЛЬСТВО ОБЩЕСТВА ПОТРЕБИТЕЛЕЙ
МОСКОВСКОГО ВЫСШЕГО ТЕХНИЧЕСКОГО УЧИЛИЩА

Инж.-мех. Е. Н. ТИХОМИРОВ
преподаватель Московского Высшего Технического Училища

КУРС
СОПРОТИВЛЕНИЯ МАТЕРИАЛОВ

С атласом чертежей на 37 таблицах (395 фигур)

Выпуск I







МОСКВА—1926

Мосгублит № 27756. Тираж 4000 экз.

Типография Госиздата „Красный Пролетарий“. Москва, Пименовская, 16.

ОТ АВТОРА.

От основателя Сопротивления Материалов Галилея (1564—1642) нас отделяет около 300 лет. За этот период эта наука быстро развивалась, возбудив интерес к себе у многих выдающихся умов последних столетий. Сопротивление Материалов есть одна из границ, отделяющих чистую Математику от Техники. Интерес к этой науке становится еще более понятным, если вспомнить, что она есть своего рода грамматика Техники: она одна из первых, или, может быть, просто первая, делает строителя технически грамотным.

Путей развития Сопротивления Материалов было и остается два: аналитический и экспериментальный. Как правильно замечено в одном старом американском руководстве, тема этого предмета неисчерпаема (inexaustible). Действительно, если аналитическая часть может обогащаться все новыми методами, то тем более объекты экспериментального исследования, конечно, не имеют никакого предела. Кроме того, в своем развитии Сопротивление Материалов вплотную подходит к двум важнейшим областям строительства— к Строительной Механике, дающей законы строительства сооружений, и к обширнейшему ряду дисциплин, начинающихся Деталями Машин, которые все можно объединить общим именем—Машиностроение.

Такое центральное место Сопротивления Материалов между Математикой, Теоретической Механикой, Физикой и строительной Техникой особенно способствует бесконечному развитию и даже обязывает к нему.

Все сказанное объясняет, в частности, тот общеизвестный факт, что многие выводы этого предмета могут быть получены в настоящее время весьма разнообразными путями. Это делает первоначальное изучение Сопротивления Материалов делом очень трудным. У начинающего, в особенности если он одновременно читает несколько руководств, часто создается впечатление некоторой сбивчивости, несогласованности отдельных положений, и только более глубокое знание дает возможность уложить все многообразие этого предмета в одну систему. Трудность первоначального же изучения Сопротивления Материалов усугубляется еще тем, что большинство авторов, и русских и иностранных, не только в монографиях, но и в курсах, излагают опытную часть предмета одновременно с теоретической. Эти части действительно не могут существовать одна без другой; но

изучающему предмет чрезвычайно трудно отделить более существенное и общее от единичного и случайного, а кроме того, он плохо использует экспериментальный материал, так как этот материал разбросан, и его трудно искать в большой книге. Если такой способ изложения не составлял для читателя особого труда в то время, когда самый объем предмета был не так еще велик, то теперь, при очень большом объеме и непрерывном обогащении все новыми данными, указанный способ изложения или уже сделался или очень скоро сделается совершенно невозможным.

Между тем, для неспециалиста в данной области, которому прежде всего нужно уметь правильно рассчитывать, сберегая при этом свое время, нет надобности знать все оттенки подхода к отдельным вопросам прочности, устойчивости и определения деформаций; ему необходимо хорошо знать только некоторые способы, наиболее удобные; экспериментальный материал он также должен иметь в несколько систематизированном виде. Тогда, овладев теоретической основой, он уже легко может надстраивать специальные частные сведения.

Поэтому наилучшей передачей курса Сопротивления Материалов, по глубокому убеждению автора, является та, в которой этот курс представляется в виде двух отдельных параллельных частей: *I—теоретической* части, имеющей целью дать математическую методику курса, его аналитические выводы, способы расчетов; здесь сообщаются (в виде готовых результатов) только те экспериментальные положения, от которых зависит сама теория, в первую очередь два основных: закон Гука и гипотеза плоских сечений Бернулли; и *II—экспериментально-справочной* части, в которой собраны опытные данные; нумерация параграфов в этой части должна итти соответственно части I. Отдельно взятая II часть может являться справочником.

Основой предлагаемой читателю книги является материал, прочитанный автором на Механическом и (с небольшими сокращениями) на Электротехническом Факультетах Московского Высшего Технического Училища в $\frac{1924}{1925}$ и $\frac{1925}{1926}$ акад. годах. Добавлены некоторые важные главы, имеющие безусловный интерес и приложение.

Обозначения величин приняты те же, как в курсе проф. С. П. Тимошенко, за исключением обозначения нормального и тангенциального напряжения H и T, заимствованных у проф. П. К. Худякова. Введено вновь обозначение (M), (Q), (A), (B)... фиктивных величин от эпюры моментов как нагрузки.

Литература, которой пользовался автор, перечислена отдельно.

Все замечания по поводу настоящей книги автор примет с признательностью.

Евг. Тихомиров.

Москва, 1 марта 1926 г.
Лефортово,
Высшее Техническое Училище.

Обозначения курса.

I. Латинский алфавит.

a	абсолютный сдвиг,
a	длина консоли балки,
a	расстояние между двумя параллельными осями инерции,
b	ширина произвольного горизонта сечения балки,
$c=\frac{d}{D}$	отношение диаметров пустотелого вала,
d	диаметр вала, диаметр заклепки,
e	относительное удлинение,
e	шаг заклепок по направлению действующего усилия,
f	стрела прогиба балки (максимальный прогиб),
g	ускорение силы тяжести,
$h=h_1+h_2$	высота сечения изгибаемого бруса,
h_1	высота растяжения в сечении, } или наоборот,
h_2	„ сжатия „ „ }
j	ускорение,
$j_\omega=\frac{d\omega}{dt}$	угловое ускорение,
k	коэффициент пропорциональности,
l	длина бруса, вала, пролета,
m	число заклепок,
m	запас прочности,
n	число срезов заклепки ($n=1$ или $n=2$),
n	число оборотов в минуту,
p	давление абсолютное или избыточное,
q	нагрузка на погонную единицу длины,
r	радиус инерции фигуры,
r	радиус вала,
s	длина дуги,
s	расстояние заклепки, наиболее удаленной от оси, в накладке клепаной балки,
t	время в секундах,
t	температура в ° C

t	шаг заклепок $\perp$ действующему усилию,
u	текущее переменное,
v	скорость,
x, y, z	текущие переменные,
y	расстояние горизонта сечения от нейтральной оси,
y	ордината инфлюентной линии,
y	прогиб балки в произвольной точке,
y_1, y_2, y_3	прогиб балки в 1-м, 2-м, 3-м участках,
A	коэффициент в формуле $d = A\sqrt[3]{\frac{N}{n}}$,
A	левая опорная точка балки,
A	„ „ реакция балки,
$B = \sqrt{H^2 + 4T^2}$	сокращенное обозначение указанного радикала,
B	правая опорная точка балки,
B	„ „ реакция балки,
$(A), (B)$	фиктивные опорные реакции от эпюры моментов,
C_1, C_2, C_3	постоянные интегрирования дифференциального уравнения упругой линии в 1-м, 2-м, 3-м участках (первое интегрирование),
D_1, D_2, D_3	то же (второе интегрирование),
D	наружный диаметр пустотелого вала,
E	коэффициент (модуль) упругости 1-го рода (нормальный),
F	площадь фигуры,
F	„ поперечного сечения бруса,
$F_з$	одна срезаемая площадь сечения заклепки,
$F_б$	рабочая площадь болта,
G	коэффициент (модуль) упругости 2-го рода (при сдвиге),
H	нормальное напряжение,
$H_д$	„ „ допускаемое,
$H_Д$	„ „ динамическое,
$H_в$	„ временное сопротивление,
H_1 и H_2	„ главные напряжения,
H_c	напряжение Сен-Венана,
J_x, J_y	осевой момент инерции фигуры относительно оси x, y,
J	центральный осевой момент инерции,
J_0	полярный момент инерции,
J_α	момент инерции относительно оси, повернутой от главной на угол α,
$J_{max} = J_1$, $J_{min} = J_2$	главные моменты инерции,
J_{xy}	центробежный момент,
K	тангенциальное напряжение в косом сечении бруса,
K	напряжение изнашивания,
L	работа внешних сил,

M	изгибающий момент,
M_k	крутящий момент,
M_A	момент заделки левой опоры,
M_B	„ „ правой „ ,
(M)	фиктивный изгибающий момент от эпюры моментов,
(M_A) и (M_B)	фиктивные реактивные моменты—левый и правый,
N	мощность в л. с.,
N	нормальное напряжение в косом сечении бруса,
$N_{max} = H_1$, $N_{min} = H_2$	главные напряжения,
P	нагрузка сосредоточенная или сплошная,
Q	поперечная сила в сечении балки,
(Q)	фиктивная поперечная сила от эпюры моментов,
R	нагрузка сосредоточенная или сплошная,
S	статический момент,
$S_x = F\bar{y}$	статический момент относительно оси x,
T	тангенциальное напряжение,
$T_д$	„ „ допускаемое,
$T_Д$	„ „ динамическое,
T_{max}	„ максимальное напряжение (3-я теория)
T_0	временное тангенциальное сопротивление,
U	сила сдвига в продольной плоскости балки,
U	нагрузка сосредоточенная или сплошная,
V	работа внутренних упругих сил (потенциальная энергия),
W, $W_1 = \frac{J}{h_1}$, $W_2 = \frac{J}{h_2}$	модуль сопротивления изгибу,
W_0	модуль сопротивления кручению круга,
X, Y, Z	проекции внешних сил на оси x, y, z (компоненты),
X, Y, Z	обозначение искомых сил,

II. Греческий алфавит.

α	угол,
α	угол закручивания вала на единицу длины,
$\beta = \frac{T_{max}}{T_{сред}}$	отношение максимального тангенциального напряжения в поперечном сечении к среднему.
α, β	отвлеченные коэффициенты.
γ	удельный вес,
δ	толщина листа,
δ	„ стенки,
η	коэффициент прочности заклепочного шва,
η	ордината 2-й веревочной кривой,
μ	ордината 1-й веревочной кривой,

θ	угол закручивания вала на произвольной длине,
θ	„ поворота поперечного сечения балки (угол упругой линии),
θ_A, θ_B	угол поворота на опоре A и B,
λ	удлинение, укорочение,
ϱ	радиус кривизны,
σ	коэффициент Пуассона,
τ	удельная работа образца,
$\varphi = \frac{a}{h}$	относительный сдвиг,
φ	угол,
φ, ψ, θ	обобщенные координаты, смещения.
ω	угловая скорость,
Φ, Ψ, Θ	обобщенные силы, действия,
Φ	площадь веревочной кривой или веревочного многоугольника,
Σ	знак суммы,
Ω	фиктивная нагрузка (площадь эпюры моментов).

III. Параллельное обозначение напряжений в некоторых русских курсах Сопротивления Материалов и Строительной Механики.

Текст.	С. П. Тимошенко.	П. К. Худяков.	П. А. Велихов.	Л. Д. Проскуряков.	Н. Н. Митинский.	В. Л. Кирпичев.	С. И. Дружинин.	И. С. Подольский.
H	p_n	Z, D, B } H	n	n	R	T, N	σ	R
T	p_t	T, S } H	t	t	T	T	τ	R_t

ПРЕДИСЛОВИЕ К ВЫПУСКУ I.

В соответствии с тремя измерениями пространства Сопротивление Материалов совершенно ясно разграничивается на следующие отделы: I) в начале изучается так называемый *брус*—тело хотя и трех измерений, но такое, что ориентация нагрузок происходит в зависимости от одного главным образом размера — длины; затем II) *пластинка* и *тонкостенные сосуды* — здесь в основу рассмотрения сил ставится поверхность и III) разбирается, поскольку возможно в условиях предмета, *тело трех измерений.*

Каждый отдел подразделяется на следующие вопросы: 1) изучение напряжений материала (вывод расчетного уравнения), иначе изучение прочности; 2) изучение деформаций и 3) изучение устойчивости. Первый и второй вопросы до некоторой степени слиты между собою, третий более от них отделен.

Наилучше исследован пока брус и составляет наиболее крупный отдел предмета.

По причинам отчасти материального свойства я обработал пока два первые вопроса для прямого бруса (за исключением многопролетной балки) — тот довольно обширный материал, с которого обыкновенно начинается изучение предмета; это составляет около $\frac{2}{3}$ общеобразовательной программы Сопротивления Материалов наших высших технических учебных заведений. Этот изложенный отдел назван *выпуском I* курса.

Если он встретит одобрение, я в непродолжительном времени постараюсь подготовить *выпуск II* (и последний) курса, который будет немного больше выпуска I и включит в себя: многопролетную балку, случаи осадки опор, учение о потенциальной энергии системы с приложениями, кривой брус, динамические напряжения и деформации и продольный изгиб, — этим закончится теория бруса, и в заключение будут даны некоторые сведения из теории пластинки и тéла трех измерений. Материал выпуска II уже в довольно значительной мере превзойдет основную программу высших технических учебных заведений, которая будет все же в нем частично представлена.

Издание I выпуска взяло на себя Издательство Общества Потребителей Московского Высшего Технического Училища.

Я старался писать самым точным языком, но кратко, так как считаю, что расплывчатость изложения вредит чтению. Выводы даны все полностью и строго, но, ради уменьшения объема, некоторые вполне очевидные преобразования не показаны; зато везде дана нумерация формул (на правой стороне страницы) и ссылки на нее при преобразованиях (на левой стороне); это дает возможность читателю легко проделать все выводы при первом чтении (если он знает элементарную Математику) и придает несколько бо́льшую цельность чтению во второй раз. Для удобства все формулы показаны еще раз отдельно, конечно, с тою же нумерацией.

Проф. П. А. Велихов оказал мне любезность просмотром настоящей работы в рукописи.

За это я приношу глубокоуважаемому Павлу Аполлоновичу свою глубокую благодарность.

Согласно своей основной идее, я, поскольку мог, стремился дать уже и в I выпуске те экспериментальные и справочные сведения, собранные во 2-ю часть, которые должны итти параллельно теории 1-й части. Собирание и приведение в сколько-нибудь стройный порядок бесчисленных существующих в литературе по этому вопросу цифровых данных и индивидуальных опытных характеристик материалов так, чтобы они подробно и действительно удобно для пользования будущего конструктора изображали жизнь каждого материала, есть дело совершенно исключительное по трудности. Поэтому на предлагаемую 2-ю часть курса приходится смотреть как на хотя и проверенный со всей возможной строгостью, но все же краткий справочник, собранный в то ограниченное время, которое было. Его цель—дать прежде всего иллюстрацию основных свойств материала и главнейшие справки для расчетов. Я относился с осторожностью ко всем собираемым цифрам, стараясь сверять их по нескольким источникам. Самых новых появившихся данных я сознательно не привел. Я избегал также данных, носящих специальный характер. За ними нужно обратиться к соответствующим курсам.

При изготовлении чертежей мне помогали: мой уважаемый товарищ, инж. Л. А. Кутаркин, собственноручно вычертивший для атласа все фигуры, начиная с таблицы 9, и чертежник Государственного Автомобильного Московского Завода А. И. Пайков, вычертивший первые 8 таблиц; за что обоим приношу мою искреннюю благодарность.

Появлению этой книги в печатном виде содействовали член Правления Общества Потребителей Московского Высшего Технического Училища М. А. Рубинчик, А. А. Шубин, создавший весь внешний вид книги и с начала до конца ведший все корректуры, и М. А. Тайц, заведовавший технической частью издания. Этим лицам свидетельствую глубокую благодарность за энергичное и внимательное содействие изданию.

Евг. Тихомиров.

Москва, 12 июля 1926 г.

ОГЛАВЛЕНИЕ.

ЧАСТЬ ПЕРВАЯ.

ТЕОРИЯ СОПРОТИВЛЕНИЯ МАТЕРИАЛОВ.

А. Общая часть.

Б. Брус.

стр.

ЧАСТЬ ВТОРАЯ.

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНО-СПРАВОЧНАЯ ЧАСТЬ.

Названия таблиц части I.

Названия таблиц части II.

Опечатки.

Стр.	*Строка*	*Напечатано:*	*Должно быть:*
16	2 сверху	тел.	сечений.
113	2 снизу	(104)	(14)

ЧАСТЬ ПЕРВАЯ.

ТЕОРИЯ СОПРОТИВЛЕНИЯ МАТЕРИАЛОВ.

A. Общая часть.

I. Обоснования. Нормальные и тангенциальные внутренние силы.

§ 1. Цель предмета. Строительная техника решает следующую конкретную задачу.

Численно даны силы, которые будут действовать на проектируемую постройку (сооружение или машину) — полезная нагрузка и в дальнейшем — собственный вес, силы инерции частей. Из какого материала нужно исполнить части этой постройки и какой размер придать каждой из них, чтобы постройка, будучи наивозможно легкой по своему весу, давала строителю гарантию в своей незыблемости, неразрушаемости, жесткости (т.-е. весьма малой изменяемости размеров) и правильности движения всех своих частей в течение неопределенно долгого времени.

В частном случае нагрузка может быть даже не дана. Тогда проектирующий должен сам подсчитать ее на основании общего задания или назначить, но так, чтобы фактическая будущая нагрузка очень мало отличалась по величине от принятой в расчете и во всяком случае ни в какой момент в дальнейшем не превышала последнюю.

Для решения такой задачи необходимо существующую жизненную зависимость между нагрузкой и геометрическими размерами частей облечь в математическую форму, которая отражала бы в себе действительную физическую природу каждого строительного материала и позволяла бы, если это нужно, заранее вычислять изменения геометрических размеров (так называемые деформации) постройки.

Нахождением этой математической зависимости в общей форме для непрерывного и однородного твердого тела занимается Теория Упругости (отдел Математической Физики).

Математические соотношения Теории Упругости нередко длинны и утомительны для вычислений; между тем техническая действительность конкретизирует и в то же время сужает общую задачу, задавая вместо гипотетического непрерывного тела определенные строительные материалы и давая объекты расчета в форме сравни-

тельно простой, а именно, в виде так называемых брусьев, пластинок, тонкостенных сосудов. В этих частных случаях, как показывает непосредственный опыт, могут быть найдены некоторые общие законы явления и установлены простые гипотезы, значительно облегчающие решение задачи.

Методы такого решения, специально в применении к строительным материалам, исключительно для брусьев, пластинок и правильной формы сосудов и на основании цифровых характеристик свойств материалов, добытых из опыта, составляют предмет Сопротивления Материалов. Эта наука считается отделом Прикладной Механики (в широком смысле этого слова), т.-е. той области знания, которая изучает вопросы теории, устройства и эксплоатации сооружений и машин.

§ 2. Брус. Пластинка. Брусом (фиг. 1) называется непрерывное твердое тело, обладающее следующими свойствами: 1) одно его измерение (длина) значительно превышает два остальных, представляя практически величину другого порядка по сравнению с ними; 2) толщина и ширина — размеры одного порядка; 3) тело бруса геометрически получается движением некоторой плоской фигуры, хотя бы даже постепенно изменяющей свои размеры и форму, но так, что центр тяжести этой фигуры движется все время по некоторой прямой или какой угодно кривой линии, называемой осью бруса; плоскость образующей фигуры остается все время нормальна к этой оси. Если ось прямая, брус называется прямым; если кривая (хотя бы и двоякой кривизны) — кривым.

Пластинкой называется непрерывное твердое тело, имеющее лишь одно измерение весьма малым по сравнению с двумя остальными. Пластинка не имеет оси. Вместо оси в пластинке рассматривается некоторая основная поверхность, лежащая внутри пластинки (в частном случае — плоскость).

§ 3. Междучастичные силы. О том, как именно устроены твердые тела, в частности строительные материалы, имеется весьма слабое представление. Однородность материалов также относительна. Под микроскопом на шлифах металлов обнаруживаются произвольной формы прослойки примесей в металле (углерода, кремния и др.). Гипотеза о том, что материал состоит из бесчисленного множества связанных между собою мельчайших частиц, не противоречит опытам с материалами. Эти частицы в зависимости от различных условий (очень часто от способа термической обработки и от величины температур) могут быть, как показывает микроскоп, или кристаллическими или аморфными. Частицы отдельных элементов могут составлять или механическую смесь, или вступать в химическое соединение между собою. Отдельные химические соединения, в свою очередь, могут опять механически смешиваться и с элементами и с соединениями. Чугун, повидимому, менее однороден, чем литое железо. Дерево несомненно неоднородно: оно имеет различные физические характеристики в зависимости от того, как направляется сила — па-

раллельно или перпендикулярно волокнам. Строительные камни также невполне однородны и пористы. Ремни имеют неодинаковые свойства на стороне, прилегавшей к телу животного, и на наружной стороне. Необработанный чугун имеет литейную корку, отличную по свойствам от самого чугуна.

Не противоречит опыту представлять себе материал состоящим из частиц, связанных между собою или силами, или какими-то иными связями, требующими действия сил для своего разрыва. Каждые две частицы не хотят расстаться друг с другом, если силы стремятся раздвинуть их, и противятся сжатию. Если материал разрывается или разделяется силами на две части, то одна из двух разъединяемых частиц остается на одной из них, другая на другой.

§ 4. Метод сечений. Напряжение. Во всякий момент времени все внешние силы, действующие на тело, и силы инерции тела находятся в равновесии. Это значит, что и каждая отдельная часть его находится в равновесии; поэтому если мысленно провести в теле (фиг. 2) произвольную плоскость AB и откинуть отделенную этим сечением часть II, то часть I останется в равновесии только в том случае, если по всему проведенному сечению AB будут приложены все внутренние элементарные (т.-е. бесконечно-малые) силы материала, которыми II часть действовала на I, удерживая ее. Способ нахождения внутренних сил в проводимом произвольном сечении называется методом сечений.

На бесконечно-малую площадку ΔF, взятую в плоскости AB, приходится некоторая бесконечно-малая сила ΔP. Отношение $\frac{\Delta P}{\Delta F} = H_{сред}$ дает среднюю интенсивность (напряженность) внутренней силы на единице площади взятой площадки. Для получения истинной величины напряженности в точке O (фиг. 3) — центре тяжести площадки ΔF — необходимо перейти к пределу, т.-е. уменьшить площадку ΔF до нуля (точка O). Предел приходящейся внутренней силы на единицу элементарной площадки определенного наклона в предположении, что площадка стремится к 0, или, что то же, истинная интенсивность внутренней силы в данной точке, рассматриваемая для определенной площадки, проходящей через эту точку, называется напряжением материала в данной точке. Математически напряжение материала выражается производной

$$C = \frac{dP}{dF}. \quad (1)$$

Размер напряжения есть $\frac{\textit{сила}}{\textit{площадь}}$ или $(\textit{сила}) \times (\textit{длина})^{-2}$, оно измеряется в единицах kgcm^{-2} или им однородных.

Происходя от силы, величины направленной, напряжение есть также вектор, и, значит, напряжения должны складываться и разлагаться геометрически. Поэтому если напряжение в данной точке

O (фиг. 3) составляет со своей площадкой некоторый угол α, то оно может быть разложено на составляющие (компоненты) — нормальное напряжение H и тангенциальное (касательное, скалывающее, напряжение сдвига) напряжение T, причем $H = C \,\mathrm{sn}\, \alpha$, $T = C \,\mathrm{cs}\, \alpha$; $C = \sqrt{H^2 + T^2}$. C есть полное (суммарное) напряжение.

Через любую данную в теле точку можно провести бесчисленное множество площадок во всех направлениях.

Для нахождения напряжения необходимо задать: координаты точки и наклон площадки, проходящей через эту точку.

§ 5. Парность тангенциальных напряжений. Пусть в некоторой точке внутри твердого тела дается некоторое тангенциальное напряжение и площадка, в которой оно находится. Тогда можно вообразить около этой точки элементарный параллелепипед dx, dy, dz так, чтобы одна грань его совпадала с данной площадкой, а ребра были только параллельны или перпендикулярны данному напряжению T (в случае произвольно расположенного параллелепипеда, напряжение можно разложить на 2 компонента, параллельно и перпендикулярно к ребрам параллелепипеда), фиг. 4. Итак, в одной грани существует сила $Tdxdz$, что для равновесия требует существования в параллельной грани обратной силы $Tdxdz$. Пару $Tdxdz$, $Tdxdz$ должна и может уравновесить только пара T_1dydz, T_1dydz в перпендикулярных гранях.

Сумма моментов всех сил относительно центра O параллелепипеда $= 0$ (нормальные к граням силы и собственный вес параллелепипеда моментов не дают)

$$Tdxdz \cdot dy = T_1 dydz \cdot dx,$$

или

$$T = T_1. \tag{2}$$

Отсюда свойство парности тангенциальных напряжений: в любой точке внутри тела не может быть площадки с тангенциальным напряжением без того, чтобы в площадке, перпендикулярной к первой и проходящей через ту же точку, не было также тангенциального напряжения, причем составляющие этих напряжений, перпендикулярные к ребру пересечения указанных плоскостей, равны между собой.

Уравнения проекций при принятии во внимание в них и нормальных к граням параллелепипеда сил также соблюдаются. Собственный вес параллелепипеда представляет собою величину следующего порядка малости по сравнению со всеми прочими силами (имеет три бесконечно-малых множителя $\gamma dxdydz$) и потому может быть отброшен в уравнении.

Из рассмотренного следует, что напряжения H и T различны по своей природе.

II. Ограничения. Гипотеза Бернулли. Закон Гука. Определения.

§ 6. Непрерывность. Форма детали. Гипотеза Бернулли. Напряжения, распределенные по сечению равномерно и неравномерно. Эпюра. Местные напряжения. Принцип Сен-Венана. Относительная линейная деформация. Относительный сдвиг. Закон Гука. Предел пропорциональности. Предел упругости. Коэффициент упругости. Статическая и динамическая нагрузка. При пользовании данными Сопротивления Материалов, как средством для расчетов, необходимо всегда иметь в виду, что оно решает вопросы не для всех случаев, но с некоторыми неизбежными и необходимыми ограничениями. О них отчасти уже дано понятие в § 1.

Ограничение 1. Материал должен быть однороден и непрерывен, или весьма близок к этим свойствам.

Непрерывен — это значит, что снаружи он может иметь отверстия, но внутри, где мы не видим, он должен представлять совершенно цельную массу (должны отсутствовать пороки чугунного литья, внутренние пустоты).

Ограничение 2. Форма рассчитываемой детали должна подходить, хотя бы с некоторой допустимой степенью приближения или полностью, под понятие бруса, пластинки, тонкостенного сосуда. Детали произвольной и сложной формы рассчитаны быть не могут.

Ограничение 3 выясняется из рассмотрения некоторых частных случаев напряжений.

а) Призматический или круглый (иначе цилиндрический) брус, нагруженный осевой центральной нагрузкой P (фиг. 5).

Методом сечений и отбрасыванием одной части легко доказать, что всякое сечение AB нагружено внутренней нормальной к сечению силой P. Так как нагрузка центральная, то вообще нет основания думать, что точки сечения AB будут иметь разное напряжение. Прочертив на бруске прямоугольники AB на равных расстояниях, легко убедиться на опыте, что в известных числовых пределах действующей силы после нагружения прямые не искривятся и останутся на равных, хотя теперь несколько бо́льших, расстояниях. Но это еще не доказывает, что сечение AB останется плоским после нагружения, и узнать, так ли это будет или нет, нельзя (у круглого бруса, например, все явления нисколько не изменятся, если представить себе, что плоскость AB перешла в сферическую поверхность большого радиуса).

Гипотеза, могущая в математической, но простой форме выразить закон образования деформаций в брусьях, была предложена Бернулли (Bernouilli): в известных обусловленных пределах внешней нагрузки после нагружения бруса всякое плоское сечение, нормальное к оси бруса, остается плоским и после воздействия на брус внешней нагрузки. Иначе говоря, оно лишь сдвигается или поворачивается за счет изменения междучастичных расстояний, но точки,

раз попавшие в сечение, остаются в нем всегда (аналогия с установившимся движением жидкости в Гидравлике).

Так как, в общем, наблюдаемые явления не противоречат гипотезе Бернулли, а некоторые незначительные отступления достаточно хорошо изучены, гипотеза считается верной.

В таком случае все точки сечения AB (фиг. 5), очевидно, должны иметь одинаковые напряжения, равные

$$H = \frac{P}{F}, \tag{3}$$

где F—площадь поперечного сечения (сечение, нормальное к. оси бруса, называется поперечным сечением).

Тангенциальное напряжение в AB возникнуть не может (фиг. 3).

b) Заклепочное соединение представляет случай тангенциального напряжения, которое может возникнуть в плоскости стыка листов, (фиг. 6 — односрезная заклепка) или в двух стыках—заклепка срезается в двух плоскостях (двусрезная заклепка, фиг. 7). Нагруженные тангенциальными напряжениями сечения здесь несомненно остаются плоскими, но самый закон распределения напряжений в точках сечений неизвестен. Так как нет особой причины к тому, чтобы эти напряжения были распределены неравномерно, и явлению начала разрушения заклепки не противоречит представление равномерности напряжений по площади сечения заклепки, то и в этом случае, называя действующую силу Q, имеем

$$T = \frac{Q}{F}, \tag{4}$$

где Q — вся сила, срезающая m заклепок,

$$F = mnF_з, \tag{5}$$

F — их вся суммарная срезающаяся площадь, причем $n = 1$ или 2 — число срезов и $F_з$ — площадь одной заклепки.

$$F_з = \frac{\pi d^2}{4}, \quad \text{где } d \text{ — диаметр заклепки;}$$

(4) (5) $$T = \frac{Q}{mnF_з}. \tag{4 a}$$

c) Случай явно неравномерного распределения напряжений представляет смятие цилиндром своего гнезда или отчасти смятие телом заклепки листа (фиг. 8). Если отложить (фиг. 9) напряжения смятия на радиусах сминаемого полуцилиндра в некотором масштабе, то получится серпообразная кривая AEC, указывающая наиболее нагруженную образующую B напряжением H_{max}. Самое простое, мало

противоречащее опыту математическое выражение всякого промежуточного напряжения H получим, если мы будем считать, что напряжение смятия пропорционально синусу угла φ (фиг. 9), т.-е.

$$H = H_{max} \cdot \operatorname{sn} \varphi.$$

Тогда, называя перпендикулярный к плоскости чертежа размер элементарной площадки FG через δ (фиг. 8), имеем нормальную силу на площадке FG

$$H_{max} \cdot \operatorname{sn} \varphi \cdot \delta \frac{d}{2} d\varphi;$$

ее составляющую параллельно действующей силе, приходящейся на одну заклепку $\frac{Q}{m} = R$,

$$H_{max} \cdot \delta \cdot \frac{d}{2} \operatorname{sn}^2 \varphi \cdot d\varphi,$$

а сумма всех таких составляющих по всей полуокружности цилиндра равна R $\left(\varphi \text{ дважды меняется от } 0 \text{ до } \frac{\pi}{2}\right)$

$$2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} H_{max} \cdot \delta \cdot \frac{d}{2} \cdot \operatorname{sn}^2 \varphi \cdot d\varphi = R.$$

Отсюда

$$H_{max} \cdot \delta d \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sn}^2 \varphi \, d\varphi = R;$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sn}^2 \varphi \, d\varphi = \frac{1}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \operatorname{cs} 2\varphi) \, d(2\varphi) = \frac{1}{4} \cdot 2 \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4};$$

$$H_{max} = \frac{4R}{\pi \delta d};$$

так как более просто определить среднее напряжение $\frac{R}{\delta d}$, получающееся как бы на прямоугольнике δd,

$$\frac{R}{\delta d} = H_{сред}, \tag{6}$$

то расчет ведут по $H_{сред}$, но имеют в виду, что

$$H_{max} = \frac{4}{\pi} \cdot H_{сред} . \tag{7}$$

Для сжимающихся цилиндра и его гнезда (как, например, катки в опорах мостов) (7) правильна; для заклепочных же соединений условна [так же как и (4)], ибо в этом случае сделано предположение, что между листами отсутствует трение. Фактически оно разгружает заклепки (на какую именно часть напряжения — неизвестно), поэтому напряжения, подсчитанные по (4) и (6), получаются искусственно увеличенными.

Однако, подметив самый характер математического выражения явлений, можно экспериментально изучать не истинные напряжения, а некоторые подставные, заменяющие истинные, которые имеют с истинными очень близкую связь. В очень многих случаях, может быть даже в большинстве случаев, определяются истинные напряжения.

Рассмотренные три примера напряжений (3), (4) и (6) дают все пути их нахождения и проверки, которыми мы идем в Сопротивлении Материалов.

В одном случае мы опираемся только на гипотезу Бернулли и получаем числовую величину напряжения, весьма близкого к истинному (или даже само истинное напряжение). В других случаях мы себя ограничиваем тем, что тщательно подмечаем сущность явления в некотором упрощенном виде (например, без учета сил трения в листах, связанных заклепочным швом) и опытным путем изучаем не истинное напряжение, которое нам трудно вычислить и которое потому трудно и проверить на опыте, а некоторое органически с ним связанное. Вся бывшая до сих пор строительная деятельность подтверждает, что такой способ удобен, прост, не ведет к ошибкам и поломкам, и потому практически вполне правилен.

Итак, ограничение 3-е состоит в том, что не всегда возможно точно математически выразить явление, и приходится довольствоваться приближенной, изученной на опыте формой решения.

Ограничение 4. Дан круглый ступенчатый брус с площадями f и F (фиг. 10), нагруженный осевой центральной силой P.

Эпюрой называется сделанное в определенном масштабе графическое изображение силы, напряжения, момента и других эффектов внутренних сил для всех поперечных сечений бруса. Проведенные поперечные плоскости сносятся своими следами на ось эпюры, и от оси откладываются в каждой плоскости в виде ординат с соблюдением знака требуемые величины в каждом сечении.

Требуется построить эпюру напряжений разрыва $H = \frac{P}{F}$ для данного бруса (фиг. 11). В плоскостях 1 — 1 и 5 — 5 напряжения равны $\frac{P}{f}$ и $\frac{P}{F}$. В 2 — 2, перед самым переходом (внезапным) к большему

диаметру, напряжения распределяются неравномерно, что и показывает фиг. 13 (вблизи угловых точек напряжение приподнимается); в 4—4 большое сечение лишь начинает работать своими наружными точками (фиг. 15) и только в 5—5 оно работает равномерно.

Напряжения в плоскостях между 2—2 и 4—4 носят местный характер, появляются за счет внезапных изменений сечения и называются местными напряжениями.

Местные напряжения могут появляться не только при резких изменениях сечения, а также в самых местах приложения внешних сил. Их районы очень малы по сравнению с размерами бруса, расстояние между $a-a$ и $b-b$ измеряется весьма небольшим числом миллиметров (может быть 2—3 mm, или даже меньше). Наличие местных напряжений не позволяет построить эпюру в этих сечениях, ибо напряжение в сечении непостоянно (фиг. 11). Лишь при плавных переходах напряжение может быть построено (фиг. 10—11 справа, пунктир).

Местные напряжения не могут быть подсчитаны уравнениями Сопротивления Материалов. Это ограничение формулируется в виде так называемого „принципа Сен-Венана" (Saint-Venant): уравнения Сопротивления Материалов правильны только для тех сечений бруса, которые достаточно удалены от районов местных напряжений. Этому вопросу здесь придано несколько расширенное толкование, с отнесением к местным напряжениям и так называемых перенапряжений — в местах резкого изменения сечения; более же близкое выражение принципа Сен-Венана следующее: для сечений, достаточно удаленных от места приложения внешних нагрузок, не получится никакой разницы в их состоянии, если эти внешние силы заменить их равнодействующей. Принцип Сен-Венана излагается в Теории Упругости.

Ясные цифровые указания, насколько именно далеко должны отстоять рассчитываемые сечения от точек, испытывающих местные напряжения, дать затруднительно. Как указано выше, длины районов местных напряжений, вообще говоря, суть величины практически следующего порядка малости по сравнению с длиною бруса.

О г р а н и ч е н и е 5 вытекает из самой физической природы материала и из его способности сопротивляться внешней нагрузке.

Эта способность особенно хорошо себя проявляет при исследовании числовой связи между напряжением бруса и его деформацией. Исследование производится помощью измерительных приборов на специальных испытательных машинах (см. экспериментально-справочную II часть курса).

Каково бы ни было воздействие внешних сил, деформации, испытываемые телом, можно свести (аналогично напряжениям) к двум только видам: или изменяется какая-либо длина, или изменяется какой-либо угол. Изменение площади и объема сводится, конечно, к изменению длины. Очень часты одновременные деформации — изменение длины и угла; однако, изучаются эти деформации почти всегда отдельно.

Если обозначить некоторую первоначальную (до воздействия сил) длину l, а абсолютное удлинение или укорочение (разность между деформированной длиной и первоначальной) λ, тогда отношение

$$\frac{\lambda}{l} = e \tag{8}$$

называется относительным удлинением или укорочением.

Так, например, в случае простого центрального растяжения бруса одинакового поперечного сечения F опыт показывает, что, пока действующие силы не слишком велики, удлинение λ пропорционально l и P и обратно-пропорционально F. Вводя коэффициент пропорциональности $\frac{1}{E}$, имеем (фиг. 17)

$$\lambda = \frac{Pl}{EF}. \tag{9}$$

Точно так же, если какой-либо параллелепипед внутри тела под действием приходящихся на его грани касательных сил претерпевает так называемый сдвиг, т.-е. превращается из прямоугольного в косоугольный, то линейное смещение a (фиг. 18) одной грани относительно другой называется абсолютным сдвигом, а отношение этой величины к расстоянию между плоскостями

$$\frac{a}{h} = \operatorname{tg}\varphi = \backsim \varphi \text{ (по малости угла)} \tag{10}$$

(отвлеченное число) называется относительным сдвигом.

Подобно линейному удлинению, здесь также наблюдается пропорциональность сдвига действующей силе и высоте h и обратная пропорциональность величине грани параллелепипеда F, так что, вводя коэффициент пропорциональности $\frac{1}{G}$, можно написать аналогично

$$a = \frac{Qh}{GF}. \tag{11}$$

Или также, объединяя предыдущее,

(3) (8) (9) $$H = Ee; \tag{12}$$
(4) (10) (11) $$T = G\varphi. \tag{13}$$

Равенства (12) и (13), связывающие напряжение и деформацию, представляют собою фундамент Сопротивления Материалов, как науки. Они показывают, что напряжение и соответствующая ему деформация пропорциональны. Однако, это положение верно лишь до извест-

ного числового предела напряжений H и T, а следовательно, и сил P и Q. То максимальное напряжение, при котором соблюдается еще пропорциональность между ним и соответствующей ему относительной деформацией, называется пределом пропорциональности. Эта величина известна для всех главнейших материалов, за исключением некоторых единичных, не подчиняющихся в точном смысле слова равенствам (12) и (13) — чугун, кожа.

Для чугуна, однако, с практически допустимым приближением равенства (12) и (13) считаются правильными.

Равенства (12) и (13) были экспериментально установлены Робертом Гуком (Hook) в 1676 г. и носят название — закон Гука.

Фактор E, зависящий исключительно от физических свойств материала, показывающий насколько неподатлив материал к образованию в нем линейной деформации, называется коэффициентом или модулем упругости первого рода, или нормальным модулем упругости (измеряется в $\mathrm{kg\,cm^{-2}}$).

Фактор G, относящийся к угловой деформации или также к деформации сдвига (измеряется в $\mathrm{kg\,cm^{-2}}$), называется модулем упругости второго рода или поперечным модулем упругости.

Будет показано, что между E и G существует соотношение

$$G = \left(\frac{3}{8} \text{ до } 0{,}4\right) E \tag{14}$$

(см. § 49).

Под упругостью понимается, однако, не только способность материала изменять свою форму и размеры под действием на него внешних сил, но также (и это главное) уничтожать свою деформацию после прекращения действия нагрузки.

Полностью или неполностью произойдет возвращение тела к первоначальным размерам — это зависит от природы матерала (иногда также от способов его обработки) и от размера сил, его нагружавших.

То максимальное напряжение, при доведении до которого материал способен еще по прекращении действия нагрузки уничтожить в некоторое неопределенное, но, вообще, конечное и небольшое время всю полученную им деформацию, называется пределом упругости.

Пределы пропорциональности и упругости у материала, нагружаемого впервые, или совсем совпадают или разнятся на весьма малую числовую величину, потому практически возможно считать их равными.

Закон Гука полностью приложим только к так называемой статической нагрузке, т.-е. такой, при которой действующие внешние силы постепенно в течение некоторого неопределенного, но короткого времени, отличного от нуля, увеличиваются от 0 до конечного значения P. Целый ряд испытательных машин для материалов осуществляет статическую нагрузку.

Непостепенное, ударное, внезапное приложение силы являет собою так называемую динамическую нагрузку, для которой также существуют испытательные машины. В этом случае закон Гука требует оговорок и осложняется дополнительными явлениями (например, так называемыми колебаниями).

После перехода за предел пропорциональности уравнения (12) и (13) теряют свою силу. При увеличении нагрузки за пределы закона Гука деформации начинают расти быстрее напряжений (см. часть II), простая закономерность явления пропадает, а вместе с ней пропадает и возможность писать математические соотношения и рассчитывать что-либо. Чрезмерно большие деформации должны совершенно расстроить правильную связь частей сооружения или машины.

Движение машины искажается, или делается невозможным.

Если нагрузка еще увеличивается, материал разрушается.

Итак, мы ограничены применением в сооружениях и машинах сил только такой величины, которая укладывается в закон Гука.

§ 7. Уравнение напряжений. Уравнение деформаций. Опасное сечение. Опасная точка. Допускаемое напряжение. Расчетное уравнение. Временное сопротивление. Запас прочности. Сопротивление Материалов связывает в математические уравнения преимущественно пять различных величин, присущих твердому, нагруженному силами телу: a) нагрузку; b) геометрические размеры некоторого проведенного в теле плоского сечения; c) напряжение; d) величины, относящиеся к физическим свойствам материала; e) деформации. Если уравнение связывает нагрузку, геометрические размеры и напряжение, оно называется уравнением напряжений. Если оно связывает нагрузку (или напряжение), геометрические размеры, физическую характеристику материала и деформацию, оно называется уравнением деформаций. Так же называются уравнения, связывающие несколько деформаций между собою. Уравнения деформаций всегда сложнее по виду, нежели уравнения напряжений. В смысле же непосредственного наблюдения деформация, наоборот, проще и нагляднее напряжения. Сечение, в котором возникает самое опасное для бруса напряжение, называется опасным сечением. Наиболее напряженная точка опасного сечения, называется опасной точкой. Заранее назначенное, допустимое максимальное напряжение, выше которого не будет напряжения ни в одной точке рассматриваемой детали, называется допускаемым напряжением $H_д$ или $T_д$. Уравнение напряжений, написанное для опасной точки и содержащее допускаемое напряжение, называется расчетным уравнением. Расчетное уравнение фиксирует лишь наибольший предел осуществляемого напряжения и понимается, вообще, как неравенство:

$$H_{рабочее} \leqq H_д \quad \text{или} \quad T_{рабочее} \leqq T_д.$$

Из него определяются геометрические размеры.

Временным сопротивлением (или разрушающим напряжением) H_0 или T_0 называется наибольшее напряжение (отнесенное к первоначальной площади поперечного сечения), возможное для данного материала,—с него начинается разрушение материала.

Физические свойства материалов не только не позволяют нагружать тело до разрушающего напряжения, но даже и подходить к нему близко. Поэтому допускаемое напряжение должно составлять лишь $\frac{1}{m}$-ю часть разрушающего напряжения, т.-е.

$$m = \frac{H_0}{H_\partial}, \tag{15}$$

или

$$m = \frac{T_0}{T_\partial}. \tag{15 a}$$

Выбрать допускаемое напряжение — значит выбрать m.

Наименьшее значение m доходит до 2 (моторы и части аэропланов). В тяжелом машиностроении и в строительстве в среднем m: сталь $2^1/_2$ — 4, железо 4 — 5, чугун 6 — 8, дерево 8 — 10. Очень часто по необходимости (вследствие неравномерности распределения нагрузок на части, условий изготовления, условий места и т. п.) m бывает больше.

Величина m называется: запас прочности.

Б. Брус.

III. Геометрические свойства плоских тел.

§ 8. Статический момент. Моменты инерции осевой и полярный. Центробежный момент. Для возможности удобно и быстро писать уравнения напряжений и деформаций следует заранее изучить некоторые геометрические свойства плоских фигур вообще, помимо уже известной площади фигуры.

Сумма произведений элементарных (бесконечно-малых) площадок dF фигуры на расстояние их y до взятой оси в плоскости фигуры, распространенная на всю площадь фигуры F, есть статический момент площади фигуры (фиг. 19)

$$S_x = \int_F y\,dF = F\cdot\bar{y}; \tag{16}$$

$$S_y = \int_F x\,dF = F\cdot\bar{x}. \tag{16 а}$$

По аналогии с силами (теорема Вариньона о моменте равнодействующей) статический момент площади равен произведению всей площади F на ее координату центра тяжести до взятой оси.

Следствие. Если ось проведена через центр тяжести фигуры, ее статический момент равен нулю.

Плечи по одну сторону оси положительны, по другую отрицательны. Размер статического момента: cm^3. Из (16) определяются координаты центра тяжести фигуры

$$\bar{x} = \frac{S_y}{F}; \qquad \bar{y} = \frac{S_x}{F}.$$

Сумма произведений элементарных площадок фигуры на квадраты их расстояний до взятой оси, распространенная на всю площадь фигуры, есть осевой момент инерции фигуры.

$$J_x = \int_F y^2\,dF = F\cdot r_y^{\,2}; \tag{17}$$

$$J = \int_F x^2\,dF = F\cdot r_x^{\,2}. \tag{17 а}$$

Длины r_y и r_x, определяемые из (17),

$$r_y = \sqrt{\frac{J_x}{F}}$$

и

$$r_x = \sqrt{\frac{J_y}{F}}$$



называются радиусами инерции фигуры.

Соединив dF с началом координат, имеем $\varrho^2 = x^2 + y^2$.

Сумма произведений элементарных площадок фигуры на квадраты их расстояний ϱ^2 до некоторого полюса O, распространенная на всю площадь фигуры, есть полярный момент инерции фигуры

$$J_o = \int_F \varrho^2 dF = \int_F (x^2 + y^2) dF = J_x + J_y. \tag{18}$$

Следствие. Сумма осевых моментов инерции фигуры относительно двух взаимно перпендикулярных осей при всевозможных поворотах системы осей есть величина постоянная.

Моменты инерции всегда положительны и отличны от нуля размер их: cm^4.

Сумма произведений элементарных площадок фигуры на произведение их координат, распространенная на всю площадь фигуры, есть так называемый центробежный момент фигуры

$$J_{xy} = \int_F xy dF. \tag{19}$$

Этот момент, вследствие того, что расстояния входят в первых степенях, может иметь положительную и отрицательную величину и быть нулем.

§ 9. Изменение моментов при повороте системы осей. Главные моменты инерции. Нахождение осей главных моментов инерции. Хотя в последующем выводе не важно, где именно находится начало, но в виду того, что для нас наиболее интересны центральные моменты инерции, расположим начало координат в центре тяжести сечения фигуры (фиг. 20).

Пусть моменты инерции J_x и J_y даны для первоначального положения осей. Если теперь система осей начнет вращаться вокруг начала, оба осевых момента инерции будут меняться по величине. На основании (18) уже заранее известно, что в то мгновение, когда один из них получит максимальную величину, другой будет иметь минимум. Найдем тот угол α, на который нужно повернуть систему осей, чтобы получить экстремум обоих моментов. Из фиг. 20

$$u = x \operatorname{cs}\alpha + y \operatorname{sn}\alpha,$$
$$v = y \operatorname{cs}\alpha - x \operatorname{sn}\alpha;$$

отсюда

$$J_u = \int_F v^2 dF = \int_F y^2 \operatorname{cs}^2\alpha \cdot dF + \int_F x^2 \operatorname{sn}^2\alpha \cdot dF - 2\int_F xy \operatorname{sn}\alpha \cdot \operatorname{cs}\alpha .$$

Так как угол α по смыслу постоянен, то

$$J_u = J_x \operatorname{cs}^2\alpha + J_y \operatorname{sn}^2\alpha - 2J_{xy} \operatorname{sn}\alpha \cdot \operatorname{cs}\alpha ;$$

$$\frac{dJ_u}{d\alpha} = -J_x \cdot 2\operatorname{cs}\alpha \cdot \operatorname{sn}\alpha + J_y \cdot 2\operatorname{sn}\alpha \cdot \operatorname{cs}\alpha - J_{xy} \operatorname{cs} 2\alpha \cdot 2 = 0.$$

После деления на $\operatorname{cs} 2\alpha$

$$-J_x \cdot \operatorname{tg} 2\alpha + J_y \cdot \operatorname{tg} 2\alpha - 2J_{xy} = 0;$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2J_{xy}}{J_y - J_x} . \qquad (20)$$

Уравнение (20) дает для 2α два угла, отличающиеся на 180°; для α, следовательно, два угла, отличающиеся на 90°. Это обстоятельство еще раз подтверждает, что если один экстремум существует для одной из осей, то, именно, для перпендикулярной оси существует другой экстремум момента инерции фигуры. Две взаимно перпендикулярные оси, для которых имеют место экстремумы моментов инерции фигуры, называются главными осями, а моменты—главными моментами инерции. Главные моменты инерции обозначаются $J_1 = J_{max}$ и $J_2 = J_{min}$, главные оси: 1—1 и 2—2.

Если взятые первоначальные оси x и y уже являются главными, то в (20) должно быть $2\alpha = 0$ или $2\alpha = 180°$, откуда $\operatorname{tg} 2\alpha = 0$. Но так как, вообще говоря, J_x неравно J_y, то $J_{xy} = 0$, или

$$J_{1,2} = 0 . \qquad (21)$$

Центробежный момент фигуры для главных осей равен нулю. Поэтому, если в выражении J_u

$$J_x = J_1 \quad \text{и} \quad J_y = J_2 ,$$

то

$$J_u = J_1 \operatorname{cs}^2\alpha + J_2 \operatorname{sn}^2\alpha . \qquad (22)$$

Это есть выражение косого момента инерции через главные. Точно также

$$J_v = \int_F u^2\, dF = \int x^2 \operatorname{cs}^2\alpha\, dF + \int_F y^2 \operatorname{sn}^2\alpha\, dF + 2\int_F xy \cdot \operatorname{sn}\alpha \cdot \operatorname{cs}\alpha\, dF,$$

откуда

$$J_v = J_1 \operatorname{sn}^2\alpha + J_2 \operatorname{cs}^2\alpha. \tag{23}$$

Кроме того, еще раз

(22) (23) $$J_u + J_v = J_1 + J_2 = Const.$$

Можно найти, подобно предыдущему,

$$J_{uv} = \int_F uv\, dF = \int_F (x \operatorname{cs}\alpha + y \operatorname{sn}\alpha)(y \operatorname{cs}\alpha - x \operatorname{sn}\alpha)\, dF =$$

$$= \frac{1}{2}(J_x - J_y) \operatorname{sn} 2\alpha + J_{xy} \operatorname{cs} 2\alpha,$$

откуда получается выражение любого центробежного момента через главные моменты инерции

$$J_{uv} = \frac{1}{2}(J_1 - J_2) \operatorname{sn} 2\alpha. \tag{24}$$

Из уравнения

$$\frac{dJ_{uv}}{d\alpha} = 0$$

или

$$\frac{1}{2}(J_x - J_y) \operatorname{cs} 2\alpha \cdot 2 - J_{xy} \operatorname{sn} 2\alpha \cdot 2 = 0$$

получается угол $2\alpha_1$, при котором имеет место экстремум центробежного момента,

$$\operatorname{tg} 2\alpha_1 = \frac{J_x - J_y}{2J_{xy}}. \tag{25}$$

Так как

(20) (25) $$\operatorname{tg} 2\alpha \cdot \operatorname{tg} 2\alpha_1 = -1,$$

то углы 2α и $2\alpha_1$ отличаются на 90°, следовательно, углы α и α_1 — на 45°.

Итак, экстремум центробежного момента имеет место для осей, составляющих с главными угол 45°.

Это непосредственно доказывает и (24), дающая при $\alpha = 45°$ максимальное значение центробежного момента

(24) $$J_{uv\,max} = \frac{1}{2}(J_1 - J_2). \tag{26}$$

Таким образом, всякие случайные моменты относительно повернутых на любой угол α осей очень просто выражаются через

главные. Но эти главные оси, вообще говоря, нужно еще найти на фигуре.

В том случае, когда фигура имеет хотя бы одну ось симметрии, главными осями являются: эта ось симметрии и ей перпендикулярная. В самом деле (фиг. 21), геометрически ясно, что тогда каждой элементарной площадке dF соответствует ей симметричная площадка, имеющая одну из координат знака, обратного прочим. При суммировании произведений $xydF$ по всей площадке фигуры всем положительным произведениям будут отвечать точно такие же отрицательные, что сделает центробежный момент равным 0. Но оси, для которых $J_{xy}=0$, суть главные.

Если нет ни одной оси симметрии, то нужно искать α по (20). Для этого определяются моменты инерции для двух выбранных осей x и y и для оси, биссекторной между ними. Называя последний момент J_{45}, находим из уравнения

$$J_u = J_x \operatorname{cs}^2\alpha + J_y \operatorname{sn}^2\alpha - 2\, J_{xy} \operatorname{sn}\alpha \cdot \operatorname{cs}\alpha\,,$$

положив $\alpha = 45°$,

$$J_{45} = \frac{1}{2}(J_x + J_y) - J_{xy} \qquad (27)$$

Отсюда определяется J_{xy} для подстановки в (20).

В частном случае, если оси x и y, для которых ищется центробежный момент, параллельны главным центральным осям отдельных частей фигуры, J_{xy} получается проще. Пусть (фиг. 22) главные оси верхней части фигуры XY.

$$J_{xy} = \int_{F_1} xydF = \int_{F_1}(X+b)(Y+a)\,dF = \int_{F_1} XYdF + b\int_{F_1} YdF +$$
$$+ a\int_{F_1} XdF + ab\int_{F_1} dF = ab\cdot F_1\,,$$

так как первые три интеграла по доказанному выше обращаются в 0.

Если окажется, что $J_1 = J_2$, или вообще $J_x = J_y$, или даже равенство двух моментов инерции относительно неперпендикулярных осей, то, конечно, все осевые моменты инерции фигуры равны между собой и все оси суть главные (круг, квадрат, равносторонний треугольник, все правильные многоугольники, всесторонне симметричный крест и пр.).

§ 10. Эллипс инерции. Существует несколько способов графического построения моментов инерции и центробежного момента для произвольно наклоненных осей по главным моментам J_1 и J_2. Эти способы являются геометрическим изображением формул (22), (23) и (24). Вот один из них.

Пусть (фиг. 23) на двух главных радиусах инерции r_1 и r_2 построен эллипс, как на полуосях. Оси 1 — 1 и 2 — 2 главные.

Берем произвольные оси xOy под углом α к главным. Проводим касательную к эллипсу AB параллельно оси x. Тогда AE есть диаметр, сопряженный оси x.

Можно доказать, что перпендикуляр OB на касательную есть радиус инерции относительно оси x.

Действительно, называя координаты относительно $1O2$ X и Y, имеем уравнение эллипса

$$\frac{X^2}{r_2^2}+\frac{Y^2}{r_1^2}=1$$

и для точки C

$$X=OC\cdot \mathrm{cs}\,\alpha;$$
$$Y=OC\cdot \mathrm{sn}\,\alpha.$$

После постановки в уравнение

$$\frac{OC^2\cdot \mathrm{cs}^2\alpha}{r_2^2}+\frac{OC^2\cdot \mathrm{sn}^2\alpha}{r_1^2}=1,$$

откуда

$$OC^2=\frac{r_1^2\cdot r_2^2}{r_1^2\,\mathrm{cs}^2\alpha+r_2^2\,\mathrm{sn}^2\alpha}.$$

Но по 2-й теореме Аполлония площадь паралеллограмма, построенного на сопряженных диаметрах, есть величина для каждого эллипса постоянная; поэтому, так как оси эллипса—также сопряженные диаметры,

$$OC\cdot OB=r_1\cdot r_2;$$
$$OC^2\cdot OB^2=r_1^2\cdot r_2^2;$$

$$OB^2=r_1^2\,\mathrm{cs}^2\alpha+r_2^2\,\mathrm{sn}^2\alpha=\frac{1}{F}(J_1\,\mathrm{cs}^2\alpha+J_2\,\mathrm{sn}^2\alpha)=\frac{J_x}{F}=r_x^2;$$

$$OB=r_x;$$

так же

$$OF=r_y.$$

Указанное правило построения можно выразить иначе. OB есть координата точки касания, перпендикулярная к той оси, радиус инерции для которой она выражает. По умножении квадрата этого радиуса на площадь фигуры получается соответствующий момент инерции. Тогда можно ожидать, что центробежный момент относительно осей xOy получится, если взять произведение координат точки касания и умножить также на F. И в самом деле, так как по 1-й тео-

реме Аполлония сумма квадратов двух сопряженных диаметров эллипса равна сумме квадратов его осей, то

$$OC^2 + OA^2 = r_1^2 + r_2^2$$

и далее

$$AB^2 = OA^2 - OB^2 = r_1^2 + r_2^2 - OC^2 - OB^2 = r_1^2 + r_2^2 - \frac{r_1^2 \cdot r_2^2}{r_x^2} - r_x^2 =$$

$$= \frac{(r_x^2 - r_2^2)(r_1^2 - r_x^2)}{r_x^2} = \frac{(r_1^2 \operatorname{cs}^2\alpha + r_2^2 \operatorname{sn}^2\alpha - r_2^2)(r_1^2 - r_1^2 \operatorname{cs}^2\alpha - r_2^2 \operatorname{sn}^2\alpha)}{r_x^2} =$$

$$= \frac{\operatorname{cs}^2\alpha\,(r_1^2 - r_2^2)\cdot \operatorname{sn}^2\alpha\,(r_1^2 - r_2^2)}{r_x^2}; \quad AB = \frac{(r_1^2 - r_2^2)\cdot \operatorname{sn}\alpha \cdot \operatorname{cs}\alpha}{r_x};$$

(24) $$AB \cdot r_x = \frac{1}{2}(r_1^2 - r_2^2)\operatorname{sn} 2\alpha = \frac{1}{2F}(J_1 - J_2)\operatorname{sn} 2\alpha = \frac{J_{xy}}{F}.$$

Моменты инерции и центробежный момент попутно доказывают некоторые геометрические свойства эллипса, например, что также

$$OF^2 + OB^2 = r_1^2 + r_2^2$$

(постоянство суммы моментов инерции), или что поштрихованные два треугольника (фиг. 23) при всех поворотах осей равновелики. Первое свойство дает, что гипотенузы NM и BF всегда равны, хотя самые треугольники NOM и BOF неравны. Это облегчает построение радиуса инерции для другой оси, если для одной он уже построен (нахождение сразу точки F при помощи точки B). Самый эллипс чрезвычайно наглядно изображает все свойства моментов—изменение их по величине при повороте осей, максимальную величину центробежного момента для биссекторных осей, обращение его в 0 для главных и пр.

Рассмотренный эллипс носит название: эллипс инерции.

§ 11. Изменение моментов инерции при параллельном перенесении оси. Предыдущее рассмотрение относилось к поворотам осей инерции. Если ось инерции приближать к фигуре или отдалять от нее движением параллельно самой себе, момент инерции фигуры будет также изменяться.

Пусть (фиг. 24) дан центральный момент инерции J фигуры. Найти момент инерции ее для параллельной оси x, находящейся от центральной на расстоянии a.

$$J = \int_F y^2\,dF,$$

$$J_x = \int_F (y+a)^2\,dF = \int_F y^2 dF + 2a\int_F y\,dF + a^2\int_F dF = J + Fa^2, \qquad (28)$$

так как средний интеграл по свойству статического момента равен 0.

Отсюда: момент инерции площади фигуры относительно произвольной оси равен моменту инерции относительно ей параллельной центральной оси плюс площадь фигуры, умноженная на квадрат расстояния между осями.

Отсюда также: самый меньший момент инерции может быть только для центральной оси.

§ 12. Центральные моменты инерции основных фигур.

1) Прямоугольник и параллелограмм (фиг. 25 и 26).

$$J=\int_F y^2dF=\int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} y^2b\,dy=\frac{bh^3}{12}. \tag{29}$$

2) Квадрат; $b=h=a$;

$$J=\frac{a^4}{12}. \tag{30}$$

3) Треугольник (фиг. 26); проведением диагонали и по теореме § 11:

$$\left[J+\frac{bh}{2}\left(\frac{h}{6}\right)^2\right]\cdot 2=\frac{bh^3}{12};$$

$$J=\frac{bh^3}{36}. \tag{31}$$

4) Круг; предварительно полярный момент инерции (фиг. 27):

$$J_0=\int_F \varrho^2dF=\int_0^{\frac{d}{2}}\varrho^2\cdot 2\pi\varrho\,d\varrho=\frac{\pi d^4}{32}=\infty\, 0{,}1d^4; \tag{32}$$

$$J_x=J_y=J=\frac{J_0}{2}=\frac{\pi d^4}{64}=\infty\, 0{,}05d^4. \tag{33}$$

5) Эллипс (фиг. 28). Так как между хордами эллипса и круга существует соотношение

$$\frac{x_э}{x_к}=\frac{b}{r}=\frac{b}{a},$$

то

$$J_1=\int_{-a}^{+a}y^2x_э dy=\frac{b}{a}\int_{-a}^{+a}y^2x_к dy=\frac{b}{a}\,J_{круга}=$$

$$=\frac{b}{a}\cdot\frac{\pi(2a)^4}{64}=\frac{\pi a^3b}{4}=\infty\, 0{,}785\,a^3b. \tag{34}$$

Так же

$$J_2=\frac{\pi ab^3}{4}=\infty\, 0{,}785\,ab^3. \tag{34 a}$$

6) Круглая кольцевая площадь (фиг. 29).

$$J_0 = \frac{\pi}{32}(D^4 - d^4) = \frac{\pi D^4}{32}(1 - c^4) = \infty\, 0{,}1 D^4 (1 - c^4); \tag{35}$$

$$c = \frac{d}{D}; \tag{36}$$

$$J = \frac{\pi D^4}{64}(1 - c^4) = \infty\, 0{,}05 D^4 (1 - c^4). \tag{37}$$

IV. Прямой брус. Общий случай нагружения.

§ 13. Шесть уравнений равновесия внешних и внутренних сил прямого бруса. Одной из основных задач Сопротивления Материалов является—уметь вычислить полное напряжение в *любой* точке бруса (за исключением только точек с местными напряжениями), если нагрузка и размеры бруса заданы. Но так как напряжение зависит не только от координат выбранной точки, но и от наклона площадки, в которой оно ищется, то прежде вычисляются напряжения в поперечных плоскостях бруса, а по нахождении их возможно найти напряжение и в любой косой площадке.

Прежде изучается прямой брус, как простейший.

Поперечное сечение его может изменяться по величине и форме, но постепенно и медленно (фиг. 30). Нагрузка может быть какая угодно, пространственная, из сил и пар, приложена под какими угодно углами, сосредоточенная или сплошная, и направление отдельных сил может проходить через ось бруса или не проходить. Нужно найти напряжения в поперечном сечени CD. Отбрасываем мысленно правую часть бруса II и заменяем ее действие на I часть внутренними силами в сечении CD. Именно эти силы сейчас и ищутся. Пусть начало координат O расположено в центре тяжести CD, оси x и y пусть совпадают с главными осями сечения, ось Z совпадает с осью бруса. Каждая внешняя сила отброшенной II части, где бы она ни была приложена, передается на сечение сквозь непрерывную толщу материала и влияет на сечение сама по себе и своим моментом относительно центра тяжести сечения. Поэтому в начале координат необходимо приложить по две равнопротивоположных и параллельных силы каждой внешней силе отброшенной II части; тогда силы того же направления, что и внешние, могут быть сложены в одну силу R, которая затем разложена на три компонента X, Y и Z по осям координат; а оставшиеся обратные внешним силы образуют с этими последними пары сил, дающие моменты относительно точки O. Эти пары отличаются тем свойством, что у них одна из сил у всех проходит через точку O; вообразив в этой точке векторы этих пар, их все можно геометрически сложить, и разложить равнодействующий вектор на три компонента.

Пары, существовавшие на II части самостоятельно, можно в целях нахождения внутренних сил в сечении CD передвинуть все парал-

лельно самим себе до тех пор, пока плоскости их не будут проходить через точку O. Тогда с ними можно поступить как с предыдущими.

Все приложенные внутренние силы фактически имеют место в сечении CD, ибо они обязаны уравновесить внешнюю нагрузку оставшейся I части. Это равновесие в плоскости CD выражается в том, что перечисленные нагрузки на плоскость CD должны по III закону Ньютона уравновеситься суммой создавшихся в плоскости CD противоположно направленных этим нагрузкам напряжений нормальных и тангенциальных.

Сумма всех сил X, так же и Y, должна уравновешиваться тангениальными напряжениями, умноженными на свои элементарные площадки.

$$\Sigma X - \int_F T_x \cdot dF = 0; \tag{I}$$

$$\Sigma Y - \int_F T_y \cdot dF = 0. \tag{II}$$

Осевая сила ΣZ уравновешивается нормальными напряжениями

$$\Sigma Z - \int_F H dF = 0. \tag{III}$$

Суммарный вектор моментов, совпадающий с осью x, производит изгиб парами, работающими в плоскости zOy, их уравновешивают моменты напряжений площадок, отстоящих от оси x на расстоянии y.

$$\Sigma M_x - \int_F H_x \cdot y \cdot dF = 0. \tag{IV}$$

Аналогично для вектора, совпадающего с осью y,

$$\Sigma M_y - \int_F H_y \cdot x \cdot dF = 0. \tag{V}$$

Вектор моментов, совпадающий с осью z, представляет собой пары в плоскостях, перпендикулярных оси бруса. Он крутит брус и стремится произвести сдвиг сечения CD относительно любого, смежного с ним. Он уравновешивается тангенциальными моментами в сечении CD

$$\Sigma M_z - \int_F T \cdot h \cdot dF = 0 \tag{VI}$$

(через h названы плечи отдельных тангенциальных сил TdF относительно центра тяжести O).

Написанные уравнения (I) — (VI) представляют собой в общем виде шесть условий равновесия внутренних сил, передающихся на произвольное поперечное сечение, и создаваемых этими силами напряжений в сечении. Все рассмотрение отнесено к центру тяжести

сечения соответственно наиболее удобному расположению начала координат. Подсчет нагрузки, приходящейся на сечение, можно было произвести применительно к любой его точке, повторив то же рассуждение; но из этой точки все же удобнее было бы перенести нагрузки соответственным приложением пар и сил опять в центр тяжести сечения, причем результат получился бы тот же.

§ 14. Принцип сложения. Выведенные уравнения (I)—(VI) принципиально правильны для любой сколь угодно сложной нагрузки. Однако, пользование ими в таком общем виде очень затруднительно. Для более скорого и удобного подсчета напряжения в любой точке пользуются так называемым принципом сложения: пока явление нагружения ограничивается напряжениями и деформациями в пределах закона Гука, общее напряжение или деформация от нескольких нагрузок равны геометрической сумме всех их, вычисленных от каждой нагрузки отдельно.

Принцип имеет единственное исключение — случай так называемого продольного изгиба, когда указанное сложение неправильно.

V. Частные случаи нагружений.

§ 15. Сжатие. Общие явления при кручении произвольного бруса. Кручение круглого цилиндра. Модуль сопротивления кручению. Угол закручивания. Напряжение растяжения от осевой силы, отвечающее уравнению (III), уже рассмотрено. Напряжение сжатия при коротких сжимаемых брусьях [также соответствующее общему уравнению (III)] подчиняется уравнениям для растягивающей нагрузки, но нагрузка, напряжение и деформация имеют отрицательный знак: $-H = \frac{-P}{F}$, $-\lambda = \frac{-Pl}{EF}$, что не меняет самых уравнений.

Пользуясь принципом сложения, рассмотрим в порядке отдельно кручение бруса [уравнение (VI)].

При изучении деформаций, вызываемых кручением, на наружной поверхности бруса чертят плоские линии — следы равноотстоящих перпендикулярных оси бруса плоскостей. Опыт показывает, что после нагружения бруса крутящими парами проведенные на брусе плоскости нарушаются и переходят в некоторые искривленные поверхности для всех брусьев, кроме круглого цилиндра. Так, в случае закручивания призматического бруса прямоугольного сечения искривление сечения происходит таким образом (фиг. 31), что во 2 и 4 четвертях его наблюдается приподнятие точек контура, а в 1 и 3 четвертях — опускание их относительно первоначальной плоскости сечения. При искривлении квадратного поперечного сечения в первоначальной плоскости его остаются не только главные оси сечения, но и обе диагонали его (фиг. 32), причем поднятие точек сечения происходит в заштрихованных треугольниках, а опускание — в остальных. В произвольном брусе (фиг. 33) это явление должно происходить неизве-

стным для нас образом. Итак, кручение бруса произвольного сечения представляет наиболее трудный случай для расчета. Искривление сечения свидетельствует о том, что в нем возникают нормальные напряжения, хотя никаких осевых внешних сил приложено и не было; развившиеся в сечении нормальные силы, конечно, сами себя уравновешивают на поштрихованных и белых площадках сечения (фиг. 31—33); однако, найти величины их в общем случае бруса не представляется возможным; также невозможно найти и соответствующие нормальные напряжения. Указанный случай представляет один из тех немногих, когда гипотеза Бернулли несправедлива.

В случае кручения круглого цилиндра сплошного или пустотелого на его поверхности наносятся равноотстоящие окружности и образующие, составляющие равномерную квадратную сетку. После закручивания все окружности остаются плоскими, все квадраты обращаются в совершенно одинаковые ромбы, а образующие переходят в винтовые линии очень крутого шага. Так как трудно предположить, что во внутренних точках, которых мы не видим, явление чем-нибудь нарушалось бы, то значит вообще относительная группировка частиц, составляющих сечение, не нарушается, и лишь все сечение целиком сдвигается относительно смежного сечения, поворачиваясь на некоторый угол относительно оси цилиндра. Таким образом, кручение круглого цилиндра есть случай чистого сдвига.

Поэтому, если в закрепленном нижним основанием цилиндре, нагруженном в самом верхнем основании крутящей парой $M_к$ (фиг. 34), выделить два поперечных сечения двумя плоскостями, отстоящими одна от другой на единицу (фиг. 35), то относительно нижней из них вся верхняя повернется на вполне определенный угол α (фиг. 35), зависящий от величины момента $M_к$, размеров цилиндра и физической природы материала. При этом выделенная на верхнем сечении двумя бесконечно-близкими радиусами элементарная площадка dF претерпит абсолютный сдвиг относительно соответственной ей нижней площадки, равный $\varrho\alpha$ (фиг. 36).

Относительный сдвиг площадки $\frac{\varrho\alpha}{1}$, вследствие расстояния между плоскостями 1, равен также $\varrho\alpha$.

$$\varphi = \varrho\alpha. \tag{10}$$

Следовательно, пользуясь законом Гука (13), имеем тангенциальное напряжение в площадке dF

(13) $$T = G\varphi = G\varrho\alpha. \tag{38}$$

Тангенциальная сила в площадке dF равна $TdF = G\varrho\alpha dF$, а момент этой силы относительно оси цилиндра

$$dM = \varrho \cdot G\varrho\alpha dF = G\varrho^2\alpha dF.$$

На основании (VI) сумма всех элементарных моментов dM уравновешивается заданным внешним моментом $M_к$, т.-е.

$$M_к = G\alpha \int_F \varrho^2 dF,$$

или

(18) $$M_к = G\alpha J_0. \tag{39}$$

Можно связать момент и тангенциальное напряжение в одно уравнение

(38) (39) $$T = \frac{M_к \cdot \varrho}{J_0}, \tag{40}$$

которое показывает, что в центре сечения ($\varrho = 0$) $T = 0$ и что T растет к периферии круга по закону прямой O_2C (ибо $M_к$ и J_0 постоянны) (фиг. 37). Поэтому

$$T_{max} = \frac{M_к \cdot r}{J_0} = \frac{M_к \cdot d}{2J_0}. \tag{41}$$

Величину

$$\frac{2J_0}{d} = \frac{J_0}{\left(\frac{d}{2}\right)} = W_0, \tag{42}$$

представляющую собою отношение полярного момента инерции круга к его наибольшему радиусу, называют модулем сопротивления кручению. Для сплошного круга

(32) $$W_0 = \frac{\pi d^3}{16} = \backsim 0{,}2\, d^3. \tag{43}$$

В таком случае для сплошного цилиндра

$$T_{max} = \frac{M_к}{W_0} = \frac{M_к}{0{,}2\, d^3}. \tag{41 a}$$

В случае кручения пустотелого круглого цилиндра выражение интеграла для крутящего момента $M_к$ распространяется только на кольцевую площадь и получает вид (фиг. 29):

$$M_к = G\alpha \int_{\frac{d}{2}}^{\frac{D}{2}} \varrho^2 dF = G\alpha (J_{0D} - J_{0d}).$$

Но

(35) $$J_{0D} - J_{0d} = J_0 = \frac{\pi D^4}{32}(1 - c^4) = \backsim 0{,}1 D^4 (1 - c^4)$$

есть полярный момент инерции кольцевой площади (35), а так как максимальное напряжение попрежнему находится на периферии (фиг. 38), то модуль кручения кольцевой площади

$$W_0 = \frac{J_0}{\left(\frac{D}{2}\right)} = \frac{\pi D^3}{16}(1 - c^4) = \backsim 0{,}2D^3(1 - c^4), \qquad (44)$$

вследствие чего уравнение напряжения для пустотелого цилиндра может быть представлено прежним выражением

$$(41a) \qquad T_{max} = \frac{M_к}{W_0}$$

с подстановкой нового W_0

$$T_{max} = \frac{M_к}{0{,}2D^3(1 - c^4)}; \qquad (45)$$

$$c = \frac{d}{D}. \qquad (36)$$

Закручиваемый цилиндр имеет одну деформацию — угол закручивания каждого сечения относительно некоторого неподвижного или принятого за начало отсчета угла (фиг. 34); этот угол обозначается θ. Очевидно, что на длине l

$$\theta = \alpha l, \qquad (46)$$

или для сплошного цилиндра, так как вообще

$$\alpha = \frac{M_к}{GJ_0}, \qquad (39)$$

$$(46) \qquad \theta = \frac{M_к \cdot l}{GJ_0}, \qquad (47)$$

$$\theta = \frac{M_к \cdot l}{G \cdot 0{,}1d^4}, \qquad (48)$$

а для пустотелого

$$\theta = \frac{M_к \cdot l}{G \cdot 0{,}1D^4(1 - c^4)}, \qquad (49)$$

причем θ выражена в отвлеченной мере. Переход на градусную меру

$$\theta^\circ = \frac{180^\circ}{\pi} \cdot \theta. \qquad (50)$$

Другая видимая деформация закручиваемого цилиндра — удлинение образующих (без изменения длины самого цилиндра) — очень

просто связывается с рассмотренной деформацией, почему специально и не рассматривается. Однако, материальные точки каждой образующей после закручивания бруса и превращения образующих в винтовые линии все же несколько раздвигаются, вследствие удлинения этих образующих. Эта деформация отвечает тангенциальным напряжениям в продольных радиальных плоскостях цилиндра (фиг. 39), которые, вследствие свойства парности, равны рассмотренным. Этими напряжениями объясняется также, почему у брусьев волокнистого сложения, обладающих меньшим сопротивлением сдвигу в продольном направлении, нежели в поперечном, разрушение начинается продольными трещинами с поверхности.

У пустотелого цилиндра отсутствуют точки, наименее нагруженные тангенциальными напряжениями в соответствующем сплошном цилиндре; поэтому выбрасывание из цилиндра всей малоценной внутренней части весьма мало повышает напряжение кручения и является выгодным, так как значительно уменьшает вес.

§ 16. Применение теории кручения к расчету валов на кручение. Все формулы § 15 применимы к расчету валов — деталей, воспринимающих крутящий момент от двигателя и передающих через себя этот момент всеми своими сечениями и точками другим машинам. Пусть вал передает N л. с., т.-е. $7500\,N\ \frac{\text{kgcm}}{\text{sec}}$ при n оборотах в минуту. Момент, создающий эту мощность, связан с мощностью равенством

$$(\textit{момент})\cdot(\textit{угловая скорость}) = (\textit{мощность}),$$

или

$$M_к \cdot \omega = 7500\,N;$$

или, так как

$$\omega = \frac{\pi n}{30},$$

$$M_к = 71620\,\frac{N}{n}\ \text{kgcm}; \tag{51}$$

тот же момент в kgm (при N попрежнему в л.с.) —

$$M_к = 716{,}2\,\frac{N}{n}\ \text{kgm}. \tag{51 a}$$

Непосредственная связь напряжения и диаметра вала с мощностью

(51) (41 a) $$T\cdot 0{,}2d^3 = 71620\,\frac{N}{n},$$

откуда

$$d = \sqrt[3]{\frac{358100}{T}}\cdot\sqrt[3]{\frac{N}{n}} = A\sqrt[3]{\frac{N}{n}}, \tag{52}$$

где

$$A = \sqrt[3]{\frac{358100}{T}}. \qquad (53)$$

Следовательно, выбор A равносилен выбору T_∂. Считая за максимальное T_∂ около 200 kgcm^{-2} (так как всякий вал испытывает еще напряжение изгиба), получаем минимальное $A = \backsim 12$. Для различных случаев работы валов, начиная с легких трансмиссионных и кончая тяжелыми коренными валами, A выбирается от 12 до 20, что соответствует напряжениям T_∂ от 207 kgcm^{-2} до 45 kgcm^{-2}.

Уравнение (52) обеспечивает достаточную прочность вала. Но для плавности работы вала (отсутствия колебаний кручения) необходимо, чтобы угол закручивания вала на длине 1 m был не больше $^1/_4{}^\circ$, что дает для железного вала при $G = 800000$ kgcm^{-2}

(47) (50) $$\frac{1}{4} = \frac{180}{\pi} \cdot \frac{71620\,N \cdot 100}{n \cdot 800000 \cdot 0{,}1 d^4}$$

еще дополнительную зависимость между N, n и d

$$d = 12 \sqrt[4]{\frac{N}{n}}, \qquad (54)$$

причем d делается большее из двух формул (52) и (54).

Везде предполагалось установившееся равномерное вращение; силы инерции вала и сидящих на нем деталей равны 0.

Работа вала всего лучше иллюстрируется эпюрами $M_к$, T и θ по длине вала, пример которых дан на фиг. 40—42 (гладкий вал); в данном случае эпюра T отличается от $M_к$ только масштабом. При ступенчатом вале эпюра T отлична от $M_к$. На фиг. 40 показаны направления действия на вал крутящих моментов отдельных шкивов (2-й шкив — главный, воспринимающий момент от двигателя); моменты, вращающие при взгляде с левого конца вала по часовой стрелке, отложены вверх. Опасный момент вала — CD, соответствующий 90 л. с. Угол закручивания (фиг. 42) отсчитывается от сечения вала в месте главного шкива и строится по формуле (47) и по эпюре $M_к$ (фиг. 41). Величина добавки угла закручивания AB (фиг. 41) отсчитывается от предыдущего угла EF и определяется из соотношения (после перечисления графических величин на истинные по масштабу каждой величины)

$$\overline{AB} = \frac{(\text{момент } \overline{GH}) \cdot l_3}{GJ_0}.$$

После правого шкива и до левого угол не изменяется, эпюра параллельна оси.

Если поменять местами 1-й шкив и главный, то раздача момента произойдет только с конца вала и получится вместо верхней положительной площади пунктирная эпюра (фиг. 41), причем расчетный

момент увеличивается в $\frac{120}{90}=1{,}33$ раза, диаметр вала увеличивается в $\sqrt[3]{1{,}33}$ раза, а вес — в $\sqrt[3]{(1{,}33)^2}$ раза при том же максимальном напряжении; поэтому теоретически выгодно располагать главный шкив в средине вала, практически же это не всегда возможно соблюсти.

Ширина шкивов представляет величину очень малую по сравнению с длинами отдельных пролетов вала, поэтому возможно при расчете принимать, что пара от шкива работает в одной плоскости. Фактически же нагружение шкивом вала и снятие шкивом момента с вала совершается не мгновенно, а по прямой AB (фиг. 43—45), ибо каждая единица ширины шкива передает $\frac{M_к}{a}$. Уравнение прямой AB в осях BOA

$$M=M_к-\frac{M_к}{a}\cdot x.$$

Пусть угол закручивания отсчитывается от плоскости приложения момента. Тогда

$$CD=\frac{M_к\cdot l}{GJ_0}.$$

Если бы момент продолжался по пунктирной прямой AD, то прибавка угла на длине a была бы

$$EF=\frac{M_к\cdot a}{GJ_0};$$

фактическая же прибавка угла равна

$$FG=\frac{1}{GJ_0}\int\limits_0^a M dx=\frac{1}{GJ_0}\int\limits_0^a\left(M_к-\frac{M_к}{a}x\right)dx=\frac{M_к\cdot a}{2GJ_0},$$

т.-е. вдвое меньше. Однако, так как мы изображаем отдачу момента шкивом прямой KL (фиг. 44), то на протяжении $OL=\frac{a}{2}$ добавляется истинный угол FG.

Уравнение параболы CG (фиг. 45)

$$\theta_1=\int\limits_0^x\left(M_к-\frac{M_к}{a}x\right)dx=M_к x-\frac{M_к}{a}\cdot\frac{x^2}{2}.$$

Из предыдущего становится понятным распределение момента в вале (фиг. 46—47, сплошная прямая) и в муфте (пунктир).

§ 17. Изгиб прямого бруса. Обыкновенный изгиб. Косой изгиб. Поперечный изгиб. Чистый изгиб. Продольный изгиб. Рассмотренный общий случай нагружения прямого бруса привел в числе прочих нагрузок к двум изгибающим нагрузкам в вертикальной и

горизонтальной плоскостях zOy и zOx [уравнения (IV) и (V)]. По принципу сложения можно, однако, изучить изгиб в какой-либо одной плоскости, например, в вертикальной.

Было доказано, что даже в общем случае нагрузки указанные два изгиба можно свести в плоскости, проходящие через главные оси каждого рассматриваемого сечения. Однако, можно представить себе нагрузку и в плоскости, не проходящей через главные оси, причем не разлагать ее по главным осям.

Таким образом, рассматривая некоторую изгибающую нагрузку, можно относительно момента, передающегося на сечение, представить себе два случая:

1) или плоскость этого момента в сечении проходит через одну из главных осей сечения (фиг. 48),

2) или же она через главную ось сечения не проходит (фиг. 49).

Первый случай называется прямым или обыкновенным изгибом, второй—косым изгибом.

Косой изгиб может или рассматриваться самостоятельно или как сказано выше, путем разложения косого момента по двум главным направлениям,—приводиться к двум обыкновенным.

Так как всякую наклонную к оси бруса силу можно разложить на перпендикулярную к оси и совпадающую с осью, то последняя производит растяжение или сжатие, и только первая производит изгиб. Таким образом, достаточно рассмотреть изгиб силами, перпендикулярными к оси бруса, и парами сил.

Изгиб перпендикулярными силами называется поперечным изгибом.

Изгиб парами сил называется чистым изгибом.

Встречные сжимающие силы (продольные), если они приложены в точках, достаточно далеко отстоящих одна от другой, могут выпучить, согнуть брус. Этот случай называется продольным изгибом.

§ 18. Шесть уравнений равновесия при поперечном изгибе прямого бруса. Итак, в первую очередь возможно рассмотреть обыкновенный поперечный изгиб. На основании всего, изложенного выше, необходимо исследовать поперечный изгиб от сил, равнодействующие которых все лежат в одной плоскости $POBK$ (фиг. 50) (пусть, например, балка заделана левым концом в стену и нагружена на свободном конце; взятие балки именно этого типа, а не иного, не влияет на общность вывода).

Напряжения в поперечных сечениях могут быть исследованы методом сечений, а потому пусть в балке проведено мысленно сечение, центр тяжести которого O. Пусть левая II часть балки мысленно отброшена, тогда, уравновешивая I часть (фиг. 51), получим силы, работающие в проведенном поперечном сечении. Пусть в O расположено начало координат, ось y лежит в плоскости равнодействующих действующей нагрузки; так как изгиб обыкновенный, то ось y есть в то же время главная ось сечения; ось x — другая главная ось; ось z совпадает с осью балки. Размеры площади поперечного сечения

и самый контур его могут постепенно и медленно изменяться. Сечение состоит из бесчисленного множества площадок dF, (фиг. 50). В каждой из них могут действовать нормальная к площадке и тангенциальная силы. Условия равновесия части I:

Первое условие: $$\Sigma X = 0. \qquad \text{(I)}$$

Так как внешняя нагрузка проекций на ось x не дает, то внутренние силы в сечении или тоже их не дают, т.-е. эти силы все просто вертикальны (фиг. 52), или же симметрично наклонены к вертикальной оси сечения (фиг. 53). (Само сечение может быть несимметрично относительно этой оси, и лишь сумма этих симметричных проекций приводится к 0.)

В отдельных примерах балок возможен, повидимому, тот и другой случаи; так, второй случай имеет, например, место в балках круглого сечения. Наличие или отсутствие проекций внутренних сил на ось x не отражается на расчете балки, так как более опасными оказываются вертикальные проекции внутренних сил в сечении.

Второе условие: $$\Sigma Y = 0 \quad \text{или} \quad Q - R_a - U = 0; \qquad \text{(II)}$$

$$Q = R_a + U. \qquad (55)$$

Это уравнение указывает, что все элементарные тангенциальные слагающие внутренних сил в сечении, параллельные оси, дают в результате так называемую поперечную силу Q, которая всегда равна по величине алгебраической сумме внешних сил, расположенных по одну сторону от сечения (по какую именно сторону — безразлично, ибо для всей балки всегда для внешних сил

$$\Sigma Y_{левых} + \Sigma Y_{правых} = 0), \qquad (56)$$

и потому численно суммы проекций той и другой стороны равны

$$\Sigma Y_{левых} = - \Sigma Y_{правых}; \qquad (56\,a)$$

Третье условие: $$\Sigma Z = 0. \qquad \text{(III)}$$

Это чрезвычайно важное уравнение доказывает (в виду того, что внешняя нагрузка проекций на ось z не дает) наличие в сечении нормальных напряжений разного знака. Все растягивающие нормальные силы в сечении уравновешиваются силами сжатия в нем. Известно, что основатель Сопротивления Материалов, как науки, великий итальянский механик, физик и астроном Галилео Галилей (Galilei) при первоначальном подходе к задаче о балке ошибся и счел, что нормальные напряжения в поперечном сечении имеют одинаковый знак (1638 г.). (Галилей первый решил задачу о балке, заделанной одним концом в стену и нагруженной силой на другом конце.) Подобную же ошибку делал знаменитый немецкий математик

Лейбниц (Leibnitz) (1680 г.); и только французский академик Паран (Parent) в 1713 г. доказал необходимость двух знаков нормальных напряжений. Это положение доказывает также, что в сечении есть точки, не имеющие напряжения (нейтральная ось), а сама балка имеет в себе слой (нейтральный, нулевой слой), нормальное напряжение в котором равно 0.

Уравнение (III) можно написать еще так:

$$\Sigma Z_{растяжения} + \Sigma Z_{сжатия} = 0; \tag{57}$$

Четвертое условие: $\Sigma M_x = 0.$ (IV)

Это уравнение дополняет и разъясняет предыдущее. Если элементарные сжимающие и растягивающие силы в сечении O (фиг. 54 и 55) умножить на плечи y, то полученная сумма моментов внутренних сил уравновешивает сумму моментов внешних сил

$$\Sigma M_{внутр} - \Sigma M_{внеш} = 0, \tag{58}$$

причем $\Sigma M_{внеш}$ тоже берется относительно оси x, т.-е. равна

$$\Sigma M_{внеш} = U \cdot b + R_a \cdot c,$$

где c есть расстояние центра тяжести контура нагрузки R_a от оси x. Отсюда: внутренний момент в пеперечном сечении равен алгебраической сумме моментов внешних сил, расположенных по одну сторону от этого сечения.

Так как по предыдущему уравнению (III) внутренние силы в сечении, составляющие этот момент, имеют сумму проекций на ось z, равную нулю, то, значит, внутренний момент в сечении есть *пара* сил.

Момент внутренней пары в сечении принято считать положительным, если соответствующий (равный) этой внутренней паре момент внешних сил изгибает балку в данном сечении выпуклостью вниз, и отрицательным—если вверх.

Плечи y на черт. 54—55 берутся от недеформированного (нейтрального слоя), т.-е. от точек, напряжения которых равны 0.

Где именно проходит недеформированный слой, пока еще неизвестно. Это будет специально выяснено (стр. 37).

Пятое условие: $\Sigma M_y = 0.$ (V)

Внешняя нагрузка относительно оси y не дает моментов, так как плоскость нагрузки проходит через эту ось (фиг. 50). Значит, сумма моментов внутренних сил в сечении относительно оси y сама по себе должна быть равна 0.

Это обстоятельство подлежит поверке при дальнейшем накоплении математических соотношений между входящими в изгиб величинами (стр. 39).

Последнее уравнение равновесия

$$\Sigma M_z = 0 \tag{VI}$$

удовлетворяется тождественно $0 = 0$, так как ни внешняя нагрузка ни внутренние силы в сечении моментов относительно оси z не дают.

§ 19. Уравнение напряжений обыкновенного поперечного изгиба прямого бруса. Две деформации балки. Модуль сопротивления изгибу. Теперь для дальнейшего рассмотрения ось бруса вместо z назовем x. Как и в предыдущих случаях (растяжение, сжатие, сдвиг, кручение) уравнение напряжений при поперечном изгибе получается из рассмотрения соответствующих деформаций — величин, поддающихся непосредственному наблюдению. На изгибаемом брусе наносится равномерная сетка, по которой и изучаются дефермации. Опыт показывает, что для строительных материалов гипотеза Бернулли соблюдается: сечения, оставаясь все время нормальными к оси бруса, лишь наклоняются, но плоскости их не нарушаются. Берем фиг. 56, две смежные точки C и D на оси бруса на расстоянии dx, считая по оси (между дугой $CD = ds$ и ее проекцией dx не следует делать различия ввиду малости деформаций; это различие нужно было бы сохранить только в том случае, если бы требовалось найти длину новой деформированной оси бруса; но этого сейчас не требуется). Деформированная ось бруса называется упругой линией. Брус имеет две разнохарактерные деформации: точки упругой линии смещаются, давая прогибы y (фиг. 57); кроме того, касательные к упругой линии дают с осью бруса x углы θ, равные как раз углам поворота сечений (углы с взаимно перпендикулярными сторонами) — следовательно, углы θ можно назвать или углами поворота, или углами упругой линии.

Из фиг. 57

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}\theta, \tag{59 a}$$

но ввиду чрезвычайной близости углов к 0° (или к 180°) их тангенсы можно считать равными самим углам

$$\operatorname{tg}\theta = \theta, \tag{60 a}$$

следовательно,

(59 а) (60)
$$\frac{dy}{dx} = \theta. \tag{59}$$

Пусть $DE \parallel OC$ (фиг. 56); тогда EK есть удлинение длины dx, так как точки C и D находятся на недеформированном слое бруса (в этом слое деформация, а следовательно, и соответствующее ей напряжение равны 0);

$$EK = e\,dx,$$

где e—относительное удлинение. Из поштрихованных подобных треугольников, пользуясь гипотезой Бернулли,

$$\frac{e\,dx}{y}=\frac{dx}{\varrho},$$

где ϱ — радиус кривизны упругой линии; или

$$e=\frac{y}{\varrho}. \tag{61}$$

Но закон Гука $H=Ee$ (12) остается в силе, поэтому напряжение в слое EK

$$H=E\frac{y}{\varrho}. \tag{62}$$

Это доказывает, что нормальное напряжение в сечении изменяется по закону прямой (зависит только от y; фиг. 58—59). [Таким образом, гипотеза Бернулли о плоских сечениях или, что одно и то же, о том, что деформации растяжения и сжатия в слоях бруса подчиняются закону прямой, приводит к прямолинейному же закону напряжений. Прямолинейный закон напряжений для прямого бруса, следовательно, доказывается, а не принимается как гипотеза. Тем не менее, все выводы можно построить, минуя гипотезу Бернулли, прямо на гипотезе прямолинейного закона напряжений, как самостоятельной; так делает Навье (Navier).]

y по высоте сечения отсчитывается от недеформированного слоя. Нужно узнать теперь, где проходит этот слой. Для этого достаточно взять уравнение (III) из § 18.

Внутренняя сила в каждой элементарной площадке HdF; сумма их всех должна быть равна 0 (внешняя нагрузка проекций на ось x не дает)

$$\int_F HdF=0;$$

(62)

$$\frac{E}{\varrho}\int_F ydF=0,$$

откуда

$$\int_F ydF=0.$$

Но статический момент лишь в том случае $=0$, если ось проходит через центр тяжести сечения. Итак, при наружной перпендикулярной к оси бруса нагрузке или при парах сил нулевой слой бруса проходит через центры тяжести поперечных сечений.

По уравнению (IV) § 18 момент внутренней пары в сечении M равен

$$M=\int_F HydF=\frac{E}{\varrho}\int_F y^2dF,$$

откуда

$$M = \frac{EJ}{\varrho}. \tag{63}$$

Эта формула составляет всю основу изгиба прямого бруса. Словами она выражается так: при постоянных размерах сечения прямого бруса произведение сгибающего момента в сечениях на соответствующие радиусы кривизны упругой линии есть величина постоянная и равна EJ—жесткости бруса.

$$Жесткость = EJ \tag{64}$$

есть произведение модуля упругости 1-го рода на центральный момент инерции сечения бруса, т.-е. она соединяет в себе физическую природу материала с геометрическими размерами сечения

(62) (63)

$$H = \frac{My}{J}. \tag{65}$$

Самые большие напряжения H будут в наружных слоях, где (фиг. 58—59)

$$y = h_1 \quad \text{или} \quad y = h_2.$$

Положив

$$\frac{J}{h_1} = W_1$$

и

$$\frac{J}{h_2} = W_2, \tag{66}$$

будем иметь

(65)

$$H_{max\,1} = \frac{M}{W_1},$$

$$H_{max\,2} = \frac{M}{W_2}. \tag{67}$$

Величины W_1 и W_2 имеют смысл только для наружных, т.-е. наиболее удаленных точек сечения от недеформированного слоя, или, все равно, от центра тяжести сечения.

Отношение W центрального момента инерции сечения к расстоянию наиболее напряженных точек, т.-е. наиболее удаленных от центра тяжести сечения, называется модулем сопротивления при изгибе.

Балкой, в отличие от стержня, могущего нагружаться только силами, идущими по направлению оси, называется брус, нагрузка на который преимущественно изгибающая и направлена под какими-угодно углами к оси.

Теперь остается еще проверить уравнение (V) из § 13

$$\int_F xHdF = 0;$$

(62) $$\frac{E}{\varrho}\int_F xydF = 0, \quad \text{или} \quad \int_F xydF = 0.$$

Правильно, так как изгиб был взят прямой—равнодействующие нагрузок проходят через главную ось поперечных сечений,—а известно, что центробежный момент относительно главных осей $= 0$.

Итак, уравнения напряжений балки — (65) и (67).

§ 20. Модули сопротивления изгибу у основных фигур.

1) Прямоугольник (фиг. 25).

(29) $$W = \frac{bh^3}{12} : \frac{h}{2} = \frac{bh^2}{6}. \quad (68)$$

2) Квадрат

(30) $$W = \frac{a^3}{6}. \quad (69)$$

3) Треугольник (фиг. 26).

(31) $$\left.\begin{aligned} W_1 &= \frac{bh^3}{36} : \frac{2}{3}h = \frac{bh^2}{24}; \\ W_2 &= \frac{bh^3}{36} : \frac{1}{3}h = \frac{bh^2}{12}. \end{aligned}\right\} \quad (70)$$

4) Круг

(33) $$W = \frac{\pi d^4}{64} : \frac{d}{2} = \frac{\pi d^3}{32} = \backsim 0{,}1 d^3. \quad (71)$$

5) Эллипс

(34) $$W_a = \frac{\pi a^3 b}{4} : a = \frac{\pi a^2 b}{4} = \backsim 0{,}785\ a^2 b; \quad (72)$$

$$W_b = \frac{\pi a b^3}{4} : b = \frac{\pi a b^2}{4} = \backsim 0{,}785\ ab^2. \quad (73)$$

6) Круглая кольцевая площадь

(37) $$W = \frac{\pi D^4}{64}(1 - c^4) : \frac{D}{2} = \frac{\pi D^3}{32}(1 - c^4) = \backsim 0{,}1 D^3 (1 - c^4). \quad (74)$$

§ 21. Эпюры сгибающего момента и поперечной силы. Нахождение размеров сечения балки. Теорема Шведлера. Был найден закон изменения нормального напряжения по высоте сечения. Опасными оказались наружные точки. Но является необходимым еще найти то сечение, в котором сгибающий момент максимален, ибо на основании формулы $H = \frac{M}{W}$ именно в этом сечении и напряжение получится максималь-

ное при W постоянном. При W переменном должно исследоваться все отношение $\frac{M}{W}$.

Исследование балки лучше всего изложить на отдельном примере. Он легко обобщается и для произвольной нагрузки, кроме того, он будет дополнен еще некоторыми другими случаями, после чего должно получиться совершенно общее знание балки.

Балка с двумя консолями (свисающими за опору частями; фиг. 60, табл. 5) нагружена равномерной нагрузкой $R = 16$ tn и сосредоточенной силой на конце $P = 6$ tn.

Балка имеет две неизвестные опорные реакции A и B (обыкновенные опоры без шарниров, дающие реакции, перпендикулярные к направлению оси, т.-е. вертикальные) и два уравнения равновесия статики $\Sigma Y = 0$ и $\Sigma M = 0$. Из них A и B определяются, балка статически определимая.

$$\Sigma Y = 0; \quad A - R + B - P = 0;$$
$$\Sigma_B M = 0; \quad A \cdot 6 - R \cdot 3 + P \cdot 1 = 0;$$

откуда

$$A = 7 \text{ tn}; \quad B = 15 \text{ tn}.$$

Теперь опор нет, и балка находится в равновесии под действием четырех внешних сил. Рассмотрение внешних сил окончено. Нахождение аналитических уравнений внутренней пары (сгибающего момента) в каждом сечении. Пусть начало координат в левой точке O.

Участком балки называется часть всей длины балки, на которой сгибающий момент M имеет во всех сечениях одинаковое аналитическое выражение.

1-й участок OA,
2-й „ AB,
3-й „ BP;

q — нагрузка на единицу длины; qx — нагрузка на длине x. Плечо поштрихованной части равномерной нагрузки (фиг. 60) $\frac{x}{2}$ [так как по теореме Вариньона (Varignon) сумму моментов всех элементарных сил относительно точки D можно заменить моментом равнодействующей]. Отсюда уравнение сгибающего момента на 1-м участке

$$M_1 = -\frac{qx^2}{2}.$$

Уравнение сгибающего момента на 2-м участке (фиг. 60)

$$M_2 = -\frac{qx^2}{2} + A(x - 1).$$

Длины выражены в этих уравнениях в m, силы в tn (другие употребительные единицы cm и kg).

Уравнение сгибающего момента на 3-м участке

$$M_3 = -\frac{qx^2}{2} + A(x-1) + B(x-7).$$

По трем указанным уравнениям построены самые кривые, представляющие собою квадратные параболы (фиг. 61), ибо дискриминант каждого уравнения, написанного в канонической форме,

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0,$$
$$b^2 - 4ac$$

равен 0.

Для исследования отдельных характерных точек парабол, а также нахождения выпуклости парабол вверх или вниз, ищутся максимумы или минимумы их.

$$\frac{dM_1}{dx} = -qx = 0; \quad x = 0;$$
$$\frac{d^2M_1}{dx^2} < 0;$$

при $x = 0$ имеется максимум — точка O (фиг. 61). Величина максимума 0.

$$\frac{dM_2}{dx} = -qx + A = 0;$$
$$q = \frac{16}{8} = 2\ \frac{\text{tn}}{\text{m}}; \quad -2x + 7 = 0; \quad x = 3^1/_2\ \text{m};$$
$$\frac{d^2M_2}{dx^2} < 0;$$

при $x = 3^1/_2$ максимум—точка F. Величина максимума

$$FG = 5^1/_4\ \text{tnm (фиг. 61)}.$$
$$\frac{dM_3}{dx} = -qx + A + B = 0;$$

при $x = 11$ максимум, равный $9\,\text{tnm}$ (вне пределов эпюры моментов).

Абсолютный максимум $KL = -7\,\text{tnm}$ получается из M_3, но проще получить его, написав момент M_3 направо (фиг. 60) при начале в точке P

$$M_3 = -P \cdot z - \frac{qz^2}{2}$$

и подставив $z = 1$.

Также и вместо производной $\frac{dM_3}{dx}$ можно было бы взять

$$\frac{dM_3}{dz} = -P - qz = 0, \quad z = \frac{-P}{q} = -3\,\text{m};$$

та же точка аналитического максимума.

Итак, балка должна рассчитываться на максимальный абсолютный момент -7 tnm.

Пусть она будет железная двутавровая. Так как знак момента указывает только на характер выпуклости упругой линии в точке B, то вообще $M_{max} = 7$ tnm $= 700000$ kgcm. При $H_{max} = H_\partial =$ $= 1200$ kgcm^{-2}

$$1200 = \frac{700000}{W}; \quad W = 584 \text{ cm}^3, \tag{67}$$

откуда по сортаменту железа балка № 30, имеющая $J = 8881$ cm^4 (при ближайшем значении $W = 592$ cm^3).

Известно, что, кроме внутренней пары M, в сечении действует еще поперечная сила Q.

Она также может быть аналитически выражена как функция x.

1-й способ. На основании того, что Q есть алгебраическая сумма внешних сил по одну сторону сечения (например, налево), можно написать для первого участка, второго и третьего (силе вниз приписывается знак —) уравнения

$$Q_1 = -qx,$$
$$Q_2 = -qx + A,$$
$$Q_3 = -qx + A + B,$$

или $Q_1 = -2x$, $Q_2 = -2x + 7$, $Q_3 = -2x + 22$, что представляет три прямых (фиг. 62, эпюра Q). Здесь $NS = A$ и $TU = B$ — приложенные сосредоточенные силы. Поперечная сила считается положительной, если при отложении ее на эпюре движением слева она направляется вверх (NS и TU направлены положительно). Иначе говоря, строя Q слева, нужно откладывать ее на эпюре в ту сторону, как она приложена на балке. Если же начать строить ее с правой стороны, то нужно поступать наоборот. Так, $VW = P$ (фиг. 62) отложена в положительную сторону, хотя сама сила P направлена вниз. Разнозначность отложенной на эпюре величины и самой силы, приложенной на правом конце балки, служит поверкой построения. В данном примере вследствие равномерности нагрузки все три прямые параллельны.

2-й способ. Пусть в сечении 1 (фиг. 64, табл. 4) момент от сил расположенных налево, есть M. Он есть произведение равнодействующей всех параллельных сил левее 1, т.-е. ΣY на плечо ее $\bar{x}$, или, так как, по определению Q, $Q = \Sigma Y$ (Q численно равна ΣY),

$$M = Q \cdot \bar{x}.$$

Если перейти в смежное сечение 2, то приращение момента есть ΔM. Оно равно $Q \Delta x$, так как плечо ΣY теперь увеличилось на Δx, плюс момент поштрихованной нагрузки на длине Δx, сама нагрузка $p \cdot f(x) \Delta x$, где p есть сила, эквивалентная квадратной еди-

нице фасада нагрузки, а $f(x) = y$ — ордината кривой нагрузки CD; плечо ее $\frac{\Delta x}{2}$. Итак,

$$\Delta M = Q\,\Delta x + p\cdot f(x)\,\frac{\Delta x^2}{2}.$$

Переходя к переделу, т.-е. совмещая плоскость 2 с 1 (делая $\Delta x = 0$), имеем после деления уравнения на Δx

$$\lim \frac{\Delta M}{\Delta x} = Q + \lim\left[p\cdot f(x)\,\frac{\Delta x}{2}\right],$$

откуда

$$Q = \frac{dM}{dx}, \tag{75}$$

т.-е. поперечная сила в сечении есть производная сгибающего момента по абсциссе (так называемая теорема Шведлера). Действительно, в примере фиг. 60 — 63 можно было получить Q просто взятием производной от M_1, M_2 и M_3 по x:

$$Q_1 = \frac{dM_1}{dx} = -qx;$$

$$Q_2 = \frac{dM_2}{dx} = -qx + A;$$

$$Q_3 = \frac{dM_3}{dx} = -qx + A + B.$$

По этой же причине точке F на фиг. 61 соответствует нулевая точка Z на фиг. 62. Нулевое значение поперечной силы соответствует, конечно, только аналитическому максимуму сгибающего момента, но не абсолютному. Нулевое значение момента отвечает на основании $\frac{EJ}{\varrho} = M = 0$, $\varrho = \infty$ точке перегиба упругой линии (H и K на фиг. 63).

VI. Деформации балки.

§ 22. Дифференциальное уравнение упругой линии и его интегрирование. Самый старый способ нахождения двух деформаций балки в любой точке ее оси основан на предварительном составлении аналитического уравнения упругой линии в каждом участке балки. Это есть способ чисто аналитический. Пока предполагается, что жесткость EJ во всех сечениях одинакова, $EJ = Const$. Известно, что радиус кривизны плоской кривой через координаты ее точек x и y выражается так (фиг. 65):

$$\varrho = \frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}}. \tag{76 a}$$

Но в балке $\operatorname{tg}\theta = \theta = \frac{dy}{dx}$ столь мало отличается от 0, что эта величина, будучи еще возведена в квадрат, по сравнению с единицей, к которой она прибавляется, исчезающе мала. Действительно, наибольшие возможные значения у строительных материалов для $\theta = \backsim \frac{1}{15}$, $\theta^2 = \frac{1}{225}$; ошибка при отбрасывании $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$ меньше $0{,}5\%_0$. Таким образом, для балки

$$\varrho_{балки} = \frac{1}{\frac{d^2y}{dx^2}}, \tag{76}$$

откуда получается

(76) (63)
$$EJ\frac{d^2y}{dx^2} = \pm M \tag{77}$$

— дифференциальное уравнение упругой линии. Как $\frac{dy^2}{dx^2}$, так и M могут иметь знак, почему необходимо в одной части уравнения ввести $\pm$. Определение знака сгибающего момента известно, радиус же кривизны упругой линии (или, все равно, $\frac{d^2y}{dx^2}$) имеет знак $+$, если он направлен в сторону положительных y. Перед интегрированием (77) нужно в правой части поставить такой знак, чтобы обе части уравнения были одного знака. Возможные здесь случаи представлены на фиг. 66 — 69, знаки относятся к точке C. Отсюда усматривается правило: если ось y направлена вниз, то в уравнении (77) нужно брать знак —:

$$y_{вниз} \; \ldots\ldots\ldots \; EJ\frac{d^2y}{dx^2} = -M; \tag{77 a}$$

если же ось y направлена вверх, то знак $+$:

$$y_{вверх} \; \ldots\ldots\ldots \; EJ\frac{d^2y}{dx^2} = M \tag{77 b}$$

(так как при $y_{вниз}$ M и ϱ имеют разные знаки, а при $y_{вверх}$ — одинаковые).

Пусть ось y в примере фиг. 60 — 63 выбрана вниз. Тогда, на основании предыдущего, уравнения упругой линии во всех трех участках найдутся так:

$$EJ\frac{d^2y_1}{dx^2} = \frac{qx^2}{2},$$

$$EJ\frac{dy_1}{dx} = \frac{qx^3}{6} + C_1; \tag{1}$$

$$EJy_1 = \frac{qx^4}{24} + C_1 x + D_1\,; \qquad \text{(b)}$$

$$EJ\frac{d^2y_2}{dx^2} = \frac{qx^2}{2} - A\,(x-1);$$

$$EJ\frac{dy_2}{dx} = \frac{qx^3}{6} - A\,\frac{(x-1)^2}{2} + C_2. \qquad \text{(c)}$$

Здесь по так называемому способу Клебша (Clebsch) проинтегрирована вся разность $x-1$ целиком [на основании того, что $d\,(x-1) = dx$] с целью получения наименьшего количества уравнений для нахождения постоянных C_1, C_2 . . . , D_1, D_2, ...

$$EJy_2 = \frac{qx^4}{24} - A\,\frac{(x-1)^3}{6} + C_2 x + D_2; \qquad \text{(d)}$$

$$EJ\frac{d^2y_3}{dx^2} = \frac{qx^2}{2} - A\,(x-1) - B\,(x-7);$$

$$EJ\frac{dy_3}{dx} = \frac{qx^3}{6} - A\,\frac{(x-1)^2}{2} - B\,\frac{(x-7)^2}{2} + C_3\,; \qquad \text{(e)}$$

$$EJy_3 = \frac{qx^4}{24} - A\,\frac{(x-1)^3}{6} - B\,\frac{(x-7)^3}{6} + C_3 x + D_3\,. \qquad \text{(f)}$$

Для нахождения 6-ти постоянных нужно воспользоваться известными заранее условиями, причем полезно начать с пограничных точек, а именно:

при $x = 1$ . . . $\frac{dy_1}{dx} = \frac{dy_2}{dx}$; из (a) и (c) получается $C_1 = C_2$; (g)

„ $x = 1$ . . . $y_1 = y_2$; из (b), (d) и (g) „ $D_1 = D_2$;

„ $x = 7$ . . . $\frac{dy_2}{dx} = \frac{dy_3}{dx}$; из (c) и (e) „ $C_2 = C_3$; (k)

„ $x = 7$ . . . $y_2 = y_3$; из (d), (f) и (k) „ $D_2 = D_3$.

Итак,

$$C_1 = C_2 = C_3 = C \text{ и } D_1 = D_2 = D_3 = D.$$

Способом Клебша в данном случае удалось свести 6 постоянных только к двум;

при $x = 1$ $y_1 = 0$, откуда из (b) $\frac{q}{24} + C + D = 0$; (l)

„ $x = 7$ $y_2 = 0$, „ „ (d) $\frac{2401q}{24} - 36A + 7C + D = 0$. (m)

Окончательно из (l) и (m), после подстановки $q = 2\,\frac{\text{tn}}{\text{m}}$ и $A = 7$ tn,

$$C = 8^2/_3\,; \quad D = -8^3/_4\,.$$

Следовательно, уравнения всех трех участков упругой линии

$$EJy_1 = \frac{x^4}{12} + 8^2/_3\, x - 8^3/_4; \qquad \text{(n)}$$

$$EJy_2 = \frac{x^4}{12} - \frac{7}{6}(x-1)^3 + 8^2/_3\, x - 8^3/_4;$$

$$EJy_3 = \frac{x^4}{12} - \frac{7}{6}(x-1)^3 - \frac{15}{6}(x-7)^3 + 8^2/_3\, x - 8^3/_4.$$

После подстановки длин в m и сил в tn из уравнений будут получаться прогибы в m.

Углы упругой линии получаются из уравнений

$$EJ\vartheta_1 = \frac{x^3}{3} + 8^2/_3, \qquad \text{(o)}$$

$$EJ\theta_2 = \frac{x^3}{3} - \frac{7}{2}(x-1)^2 + 8^2/_3,$$

$$EJ\theta_3 = \frac{x^3}{3} - \frac{7}{2}(x-1)^2 - \frac{15}{2}(x-7)^2 + 8^2/_3,$$

где

(59 a) (60 a)
$$\theta = \frac{dy}{dx}. \qquad (60)$$

Углы получаются в радиальной мере.

§ 23. Цифровой подсчет деформаций балки. Правильная подстановка единиц имеет чрезвычайно важное значение. Так как в балках удобнее всего выражать длины в m, а силы в tn, то необходимо уметь связать эти единицы с kg и cm, в которых обыкновенно выражаются напряжения, модули сопротивления, моменты инерции и модули упругости.

Прогиб на конце левой консоли у предыдущей балки получится по подстановке в (n) $x = 0$

$$EJy_0 = -8^3/_4,$$

$$y_0 = \frac{-8^3/_4}{EJ}.$$

Чтобы не подставлять E и J в m, можно перевести в другие меры $8^3/_4$. Из уравнений упругой линии нетрудно видеть, что $8^3/_4$ должно иметь тот же размер, что и левая часть уравнения EJy, т.-е. $\frac{\text{tn}\cdot\text{m}^4\cdot\text{m}}{\text{m}^2} = \text{tnm}^3$.

При выражении tnm³ через kgcm³ число нужно умножить на 1000·1000000, т.-е. пользоваться соотношением

$$1\ \text{tnm}^3 = 1000000000\ \text{kgcm}^3. \qquad (78)$$

Отсюда для рассчитанной балки № 30

$$y_0 = \frac{-8{,}75 \cdot 1000000000}{2000000 \cdot 8881} = -\frac{35 \cdot 500}{4 \cdot 8881} = -0{,}49 = \infty - 0{,}5 \text{ cm}.$$

Знак „—“ указывает, что этот прогиб происходит вверх (OY, фиг. 63). Угол упругой линии в точке O получится из (о).

$$EJ\theta_0 = 8^2/_3 .$$

Размер $8^2/_3$ в единицах задачи tnm^2. Выражение через kgcm^2

$$1 \text{ tnm}^2 = 10000000 \text{ kgcm}^2; \tag{79}$$

$$\theta_0 = \frac{26 \cdot 10000000}{3 \cdot 2000000 \cdot 8881} = \frac{1}{206}; \quad \overset{\circ}{\theta_0} = 16' 36''.$$

Подстановкой соответствующего x в уравнения прогибов и углов можно найти любую деформацию в любой точке. Нагрузка, меняющаяся по закону треугольника, рассмотрена в § 37.

§ 24. Графоаналитический способ нахождения деформаций балки. Рассмотренный способ дает деформации в виде целого аналитического уравнения, которое можно исследовать известными способами. Однако, чаще всего бывает нужно знать не целое уравнение, а деформацию в определенной точке оси. Способ, который удобно дает это, называется графоаналитическим, так как в нем аналитические и цифровые соотношения вытекают из рассмотрения площадей и их центров тяжести.

К графоаналитическому способу приводит сопоставление двух известных формул

$$\theta = \frac{dy}{dx} \tag{60}$$

и

$$Q = \frac{dM}{dx}, \tag{75}$$

дающих, что между углом упругой линии и прогибом в какой-либо точке существует совершенно та же зависимость функции и ее производной, как между сгибающим моментом и поперечной силой. Отсюда логически следует, что угол упругой линии может быть написан сразу, как поперечная сила от какой-то нагрузки, а прогиб — как момент от нее же. Эта нагрузка, конечно, не может быть обыкновенной силовой нагрузкой, так как тогда получались бы обыкновенные сила и момент, она является не настоящей, а фиктивной; но она фиктивна только как нагрузка в настоящем смысле этого слова; тем не менее, эта подобная нагрузке величина должна существовать, и ее можно найти.

Легко произвести и графическое сопоставление величин θ, y, Q и M (фиг. 70—74, табл. 4). Хотя точки максимумов вообще не должны и не могут совпадать, но графические изображения величин M и y, а также Q и θ вполне аналогичны.

Пусть пока предполагается, что жесткость EJ во всех сечениях одинакова, $EJ = Const$.

Обе деформации в элементарной форме заключаются в уравнении

$$EJ\frac{d^2y}{dx^2} = -M, \tag{77 a}$$

в котором ось y выбрана вниз.

Первое интегрирование дает

$$EJ\theta = -\int M\,dx + C,$$

т.-е. угол связан при помощи масштаба EJ с интегралом $\int M dx$; но этот интеграл есть часть площади эпюры моментов (фиг. 75, табл. 6).

Пусть выделена некоторая эпюра балки AB между двумя точками A и B (фиг. 75, табл. 6); сама балка может иметь сколько угодно опор. Считая за начало координат точку A и $AC = x$, можно выведенное уравнение применить два раза: для точки A и для точки C (текущей). $\int_{AC} M dx$ на протяжении x или AC есть поштрихованная дважды площадь. Для точки A, которая служит началом отсчета прогибов или опорой,

$$\int_{AC} M\,dx = 0;$$

точка A $\quad EJ\theta_A = 0 + C,$

точка C $\quad EJ\theta_C = -\int_{AC} M\,dx + C,$

откуда

$$EJ(\theta_A - \theta_C) = \int_{AC} M\,dx$$

или

$$\theta_C = \theta_A - \frac{1}{EJ}\int_{AC} M\,dx. \tag{80}$$

Это уравнение показывает, что для нахождения произвольного угла θ_C нужно взять угол на опоре и отнять из него деленную на EJ площадь эпюры моментов на соответствующей длине. Но совершенно так же определяется поперечная сила от обыкновенной нагрузки (фиг. 70):

$$Q_C = A - P_{AC}.$$

Значит, угол упругой линии действительно есть поперечная сила от нагрузки, которую представляет собою площадь эпюры моментов, если только разделить эту величину на EJ.

Итак:

1. Фиктивная нагрузка есть площадь эпюры моментов.

2. Она, на основании (60), (75) и (80), подчиняется в смысле величин M и Q законам обыкновенной нагрузки, имеет фиктивные моменты (M) и фиктивные пеперечные силы (Q), связь между которыми обычная.

3. Угол упругой линии в любой точке есть фиктивная поперечная сила в этой точке, деленная на EJ:

$$\theta = \frac{(Q)}{EJ}. \tag{81}$$

Вследствие предыдущего,

4. прогиб в любой точке оси есть фиктивный сгибающий момент в этой точке, деленный на EJ:

$$y = \frac{(M)}{EJ}. \tag{82}$$

Следствия:

5. Угол на опоре есть фиктивная опорная реакция в этой опоре, деленная на EJ:

$$\left.\begin{aligned} \theta_A &= \frac{(A)}{EJ}; \\ \theta_B &= \frac{(B)}{EJ}. \end{aligned}\right\} \tag{83}$$

6. Максимальный прогиб имеет место в той точке оси, в которой фиктивная поперечная сила равна 0 (здесь неповернутое сечение). Уравнение для нахождения абсциссы y_{max}:

$$(Q) = 0. \tag{84}$$

Нахождение деформаций должно начинаться с уравновешивания фиктивной нагрузки, т.-е. приложения к эпюре моментов, когда она построена, уравновешивающих ее фиктивных реактивных воздействий (они являются по отношению к эпюре реактивной внешней нагрузкой), и затем нахождения этих величин. Эти воздействия могут быть двух видов: или в виде внешних реактивных сил—фиктивных опорных реакций—или же в виде внешних реактивных моментов — фиктивных опорных моментов. Нетрудно заметить, что фиктивные реакции и фиктивные моменты совсем не обязаны быть в тех точках, где появляются на балке настоящие реакции и настоящие реактивные моменты.

7. Как фиктивная реакция, так и фиктивный момент могут существовать лишь в двух крайних точках оси балки, но никоим образом ни в одной из внутренних точек, ибо, если приложить фиктивную реакцию во внутренней точке оси, это заставило бы упругую линию получить в этой точке внезапное изменение своего угла, а прило-

жение внутри фиктивного момента равносильно получению внезапного изменения прогиба балки в этой точке, тогда как на самом деле и угол упругой линии и прогиб изменяются всегда непрерывно.

8. Следовательно, в общем случае на двух крайних концах балки (независимо от опор, которых может быть сколько угодно) может быть приложено по фиктивной реакции и по фиктивному моменту, т.-е. всего 4 величины: (A), $(M)_A$, (B) и $(M)_B$.

9. Но если конец балки совпадает с опорой, то приложить в нем фиктивного момента нельзя, так как прогиб в этой точке равен 0, а если конец балки совершенно заделан (характеризуется тем, что в заделке θ_A или θ_B равно 0), то здесь и фиктивной реакции и фиктивного момента приложить нельзя (и угол и прогиб равны 0). Таким образом, число реактивных величин очень часто бывает меньше 4: или 3, или 2, или 1; а если оба конца балки совершенно заделаны, то никаких фиктивных реакций нет, и эпюра моментов сама себя уравновешивает.

10. Уравнений Статики для нахождения фиктивных реакций можно написать только два (как и при обыкновенных силах): $\Sigma Y = 0$ и $\Sigma M = 0$; но дополнительные уравнения всегда налицо, так как хотя бы в одной точке оси балки прогиб $= 0$ (здесь или опора, или же от этой точки отсчитываются прогибы в случае, если выделена совершенно произвольная часть балки без всяких опор; тогда фиктивный момент в этой точке (внутренний) по одну сторону от точки $= 0$, что составляет новое самостоятельное условие. Например, при двух консолях фиктивные моменты в конечных точках находятся из тех двух условий, что рядом с определяемыми фиктивными моментами имеются опоры, в которых прогиб 0.

В некоторых случаях возможно понижение опор, но тогда величина понижения или прогиб в опоре должны быть известны, что также позволяет составить дополнительное уравнение.

Таким образом, фиктивная балка всегда определима.

Независимо от непосредственного приложения данной теории к балке любопытно отметить, что пользование фиктивной нагрузкой собственно заменяет двухкратное интегрирование. Следовательно, указанный метод возможно разработать и для других величин, ничего общего с балкой не имеющих, лишь бы только среди них были функции и их производные (например, так возможно найти пройденный точкой путь, если ее скорость или ускорение известны).



§ 25. Цифровой подсчет деформаций балки графоаналитическим способом. Возможно было бы решать взятый выше пример балки, прямо беря ее эпюру моментов (фиг. 61). Но тогда нужно вычислять площади и их центры тяжести с помощью интегрального исчисления. Хотя это и не составляет особого труда, но во многих случаях задача упрощается на основании принципа сложения:

$$(A) = (A)_1 + (A)_2;$$
$$(B) = (B)_1 + (B)_2;$$

$$(M)_A = (M)_{A_1} + (M)_{A_2};$$
$$(M)_B = (M)_{B_1} + (M)_{B_2}.$$

В данном случае $(A)_1$, $(M)_{A_1}$ и т. д. представляют собою величины от равномерной нагрузки, $(A)_2$, $(M)_{A_2}$ — от сосредоточенной силы P. Рассмотрим поэтому эпюру моментов в виде двух ее отдельных слагаемых, фиг. 77—78 (если ординаты эпюр 77 и 78 алгебраически сложить, получится фиг. 61). Площадь квадратной параболы $= \frac{1}{3}$ или $\frac{2}{3}$ описанного прямоугольника (при наличии вершины параболы в пределах чертежа). Площади отдельных фигур и плечи площадей показаны на фиг. 77 и 78 в tnm² и m, моменты в tnm. Вместо рассмотрения положительной площади abc и двух отрицательных Aad и Bce рассматривается положительная площадь параболы $dbe =$ $= 36$ tnm² и отрицательный прямоугольник $dABe = 6$ tnm², это равносильно сдвиганию параболы вверх на 1 tnm². Фиктивные реакции показаны на чертеже, причем значки 1 и 2 отброшены. Знаки будут приняты во внимание при окончательном суммировании. Всякая однозначная фиктивная нагрузка считается действующей вниз и положительной, сообразно с ней направляются фиктивные реакции; в разнозначной — знак учитывается.

1. Параболическая площадь (фиг. 77).

$$(A) = (B) = \frac{1}{2}\left(36 - 6 - \frac{2}{3}\right) = 14^2/_3 \text{ tnm}^2.$$

Прогиб в точке A равен 0 (следствие 10, § 24):

$$(A)\cdot 1 + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4} - (M) = 0,$$

$$(M) = 14^2/_3 + \frac{1}{12} = 14^3/_4 \text{ tnm}^2.$$

2. Треугольник (фиг. 78). Уравнения Статики

$$(A) + (B) = 18 + 3 = 21. \qquad \text{(I)}$$

Из Теоретической Механики известно, что условия равновесия не нарушаются, если вес какого-угодно однородного треугольника сосредоточить поровну в виде трех тяжелых точек в его вершинах. Сумма всех моментов относительно правой точки P

$$8(A) - 7\cdot 7 - 7 - (M)_A + (M)_B = 0; \qquad \text{(II)}$$

прогибы в точках A и B равны 0:

$$-(M)_A + (A)\cdot 1 = 0; \qquad \text{(III)}$$

$$-(M)_B + (B).1 - \frac{1}{3}\cdot 3 = 0. \qquad \text{(IV)}$$

При написании уравнений Статики (внешние силы и моменты) соблюдался знак момента Статики (часы); при написании внутренних моментов — правило знака внутренней пары (выпуклость упругой линии вниз или вверх).

Из уравнений (I) — (IV) определяются все величины, например,

$$(A) = 6 \text{ tnm}^2, \quad (M)_A = 6 \text{ tnm}^3.$$

Отсюда, например, прогиб в точке O

$$Y_O = \frac{(M)_O}{EJ} = \frac{(M)_A - (M)}{EJ} = \frac{6 - 14^3/_4}{EJ} = \frac{-8^3/_4}{EJ} \tag{82}$$

—прежнее выражение.

Знак фиктивных моментов установлен сообразно происходящим прогибам отдельно от треугольника и параболической площади с соблюдением их фактического знака.

Угол в точке O

$$\theta_O = \frac{(A)_1 - (A)_2}{EJ} = \frac{14^2/_3 - 6}{EJ} = \frac{8^2/_3}{EJ} \tag{81}$$

—прежнее выражение.

При знании площадей эпюры, их плеч и фиктивных реактивных воздействий по формулам (81) и (82) определяется любая деформация в любой точке оси балки.

VII. Тангенциальные напряжения балки.

§ 26. Тангенциальные напряжения при поперечном изгибе. Так как в поперечном сечении изгибаемого бруса существует поперечная сила Q, то, значит, в нем имеются тангенциальные напряжения. Просуммированные произведения напряжений на отдельные элементарные площадки их действий должны дать силу Q. Однако, исходить из этого положения для нахождения закона тангенциальных напряжений затруднительно. Легче воспользоваться свойством парности T-напряжений и искать величину их в некоторой произвольной горизонтальной плоскости, параллельной оси (фиг. 79—81), след которой на плоскости чертежа есть $ABCD$. Тогда от горизонтальной плоскости легко перейти к вертикальной (плоскости поперечного сечения), так как, если точка бруса, в которой ищется напряжение, одна и та же, то T в горизонтальной плоскости равно T в вертикальной (§ 5).

Пусть в плоскости *1* (фиг. 80) момент есть M_1, а в плоскости *2* — момент M_2. Так как расстояние между плоскостями dx, то

$$M_2 - M_1 = dM.$$

В одной плоскости суммарная нормальная сила больше, чем в другой; разность их должна быть уравновешена тангенциальной силой $Tbdx$ в площади $ABEF$; по малости dx напряжение T в этой площади можно считать постоянным; иначе говоря, уравнение $\Sigma X = 0$ для части бруса $EFGH$ имеет вид:

$$Tbdx = \int_{F_b} H_2 dF - \int_{F_b} H_1 dF.$$

Интегрирование распространяется на поштрихованную площадь F_b, ограниченную горизонтом b (фиг. 79). Для вывода необязательно, чтобы сечение бруса было постоянно. Оно, как и при выводе нормальных напряжений, может меняться, но постепенно, нерезко, тогда разница площадей F_b в плоскостях *1* и *2* будет величиной бесконечно-малой.

Остальные силы и условия равновесия части бруса $EFGH$ не рассматриваются, как не имеющие значения для вывода.

Известно, что

(65) $$H_1 = \frac{M_1 y}{J} \quad \text{и} \quad H_2 = \frac{M_2 y}{J},$$

где y есть расстояние площадки dF, имеющей соответствующее нормальное напряжение, от нейтральной оси (фиг. 79).

Поэтому

$$Tbdx = \int_{F_b} \frac{M_2 y dF}{J} - \int_{F_b} \frac{M_1 y dF}{J} = \frac{M_2 S}{J} - \frac{M_1 S}{J} = \frac{S}{J} dM,$$

откуда

(75) $$T = \frac{S}{Jb} \cdot \frac{dM}{dx} = \frac{QS}{Jb}.$$ (85)

Здесь $S = \int_{F_b} y dF$ — статический момент площади F_b относительно нейтральной оси. При подстановке $\frac{dM}{dx} = Q$ плоскости *2* и *1* слились в одну.

Итак, тангенциальное напряжение от поперечного изгиба в любом поперечном сечении и в любом горизонте сечения b (фиг. 79) равно произведению поперечной силы во взятом сечении на статический момент части площади сечения до взятого горизонта отно-

сительно нейтральной оси, деленному на ширину горизонта в сечении и на момент инерции всего сечения относительно нейтральной оси.

Следовательно, T распределено по сечению неравномерно, так как из доказанного ясно, что в крайних точках T равно 0 (фиг. 81), ибо там $S=0$, и увеличивается к средине сечения.

Поверка, дает ли сумма всех элементарных тангенциальных сил в сечении поперечную силу Q:

$$\int_F T dF = \int_F \frac{QS}{Jb} dF = \frac{Q}{J}\int_F \frac{S b dy}{b} = \frac{Q}{J}\int_F S dy =$$

$$= \frac{Q}{J}\left[yS - \int_F y dS\right] = \frac{Q}{J}\left[0 - \int_F y^2 dF\right] = -\frac{QJ}{J} = -Q \text{ (верно).}$$

$yS=0$, так как в этом члене S распространено на всю площадь поперечного сечения F. Знак — при Q потому, что тангенциальное напряжение обратно по направлению поперечной силе.

§ 27. Частные случаи тангенциального напряжения при поперечном изгибе.

1. Прямоугольник (фиг. 82—83).

(16) $$S = b\left(\frac{h}{2} - y\right)\frac{1}{2}\left(\frac{h}{2} + y\right) = \frac{b}{2}\left(\frac{h^2}{4} - y^2\right);$$

(85) $$T = \frac{Q}{2J}\left(\frac{h^2}{4} - y^2\right)$$

— квадратная парабола BCD (фиг. 83).

$$T_{max} = \frac{Qh^2}{8J} \text{ при } y=0.$$

Легче, однако, запомнить эту величину, сравнив ее с $T_{средн}$,

$$T_{средн} = \frac{Q}{bh} = \frac{Q}{F}; \quad (86)$$

$$\beta_{прямоуг} = \frac{T_{max}}{T_{средн}} = \frac{Qh^2 \cdot 12bh}{8bh^3 \cdot Q} = \frac{3}{2}; \quad (87)$$

$$T_{max\ прямоуг} = \frac{3}{2}\cdot\frac{Q}{bh} = \frac{3}{2}\cdot\frac{Q}{F}. \quad (88)$$

2. Треугольник (фиг. 84 — 85).

$$\frac{S}{b} = \frac{\frac{1}{2}b\left(\frac{2h}{3} - y\right)2\left(h + 3y\right)}{9b} = \frac{\left(2h - 3y\right)\left(h + 3y\right)}{27}$$

— квадратная парабола BCD (фиг. 85).

$\left(\frac{S}{b}\right)_{max}$ при $y=\frac{h}{6}$ в средине сечения (фиг. 85), так как корень уравнения $[(2h-3y)(h+3y)]'=0$ есть $y=\frac{h}{6}$; подставив в предыдущее выражение $y=\frac{h}{6}$ и умножив на $\frac{Q}{J}$, получим

(85) $$T_{max}=\frac{3}{2}\cdot\frac{Q}{F}, \tag{89}$$

т.-е. β для треугольника также $\frac{3}{2}$:

$$\beta_{треугольн}=\frac{3}{2}. \tag{90}$$

3. Круг (фиг. 86—87). Известно, что координата центра тяжести сегмента кругового (и также эллиптического) равна

$$\bar{y}=\frac{b^3}{12\cdot F_b}, \tag{91}$$

где b — хорда (фиг. 86) и F_b — площадь сегмента; поэтому для круга

$$\frac{S}{b}=\frac{\left(\frac{b^3}{12F_b}\right)F_b}{b}=\frac{b^2}{12}=\frac{r^2-y^2}{3}$$

— квадратная порабола BCD (фиг. 87).

$$T_{max}=\left(\frac{S}{b}\right)_{max}\cdot\frac{Q}{J}=\frac{r^2\cdot Q\cdot 4}{3\pi r^4}=\frac{4}{3}\cdot\frac{Q}{F_{круга}}, \tag{92}$$

т.-е. для круга

$$\beta_{круга}=\frac{4}{3}. \tag{93}$$

4. Эллипс. Как сказано в предыдущем пункте, центр тяжести эллиптического сегмента совпадает с центром тяжести кругового, отсекаемого тою же хордой (фиг. 88); поэтому и для эллипса

$$\bar{y}=\frac{b^3}{12F_b},$$

где F_b — площадь сегмента, вписанного в эллипс (или описанного), а b—хорда круга. Следовательно,

$$\frac{S_э}{b_э}=\frac{F_{bэ}\ .\ b^3}{b_э\ .\ 12F_b};$$

но площадь эллиптического сегмента есть проекция сегмента кругового, поэтому

$$\frac{F_{bэ}}{F_b} = \frac{b_э}{b},$$

так что

$$\frac{S_э}{b_э} = \frac{b^2}{12} = \frac{r^2 - y^2}{3}, \text{ как и у круга;}$$

иначе говоря, если высота сечения — вертикальный диаметр круга постоянен, то вписывать ли или описывать около этого круга эллипсы, закон изменения напряжений остается неизменным; однако, сами напряжения будут иные против круга поскольку $J_{круга}$ и $J_{эллипса}$ разнятся по величине.

$$T_{max} = \left(\frac{S_э}{b_э}\right)_{max} \cdot \frac{Q}{J_э} = \frac{r^2 \cdot Q . 4}{3\pi r^3 \cdot c} = \frac{4}{3} \cdot \frac{Q}{F_э}, \tag{94}$$

так как $F_э = \pi rc$ (вписанный эллипс); или

$$\frac{r^2 \cdot Q \cdot 4}{3\pi r^3 B} = \frac{4}{3} \cdot \frac{Q}{F_э},$$

где $F_э = \pi rB$ (описанный эллипс); так что всегда

$$\beta_{эллипса} = \frac{4}{3}. \tag{95}$$

5. Круглая кольцевая площадь (фиг. 89 — 90). Вначале эпюра T напряжения по высоте идет аналогично кругу, BE до точки F, с тою лишь разницей, что J здесь иное, а именно,

(35) $$J = \frac{\pi D^4}{64}(1 - c^4);$$

после же точки F

$$b = GH + KL = 2\left(\sqrt{R^2 - y^2} - \sqrt{c^2 R^2 - y^2}\right),$$

что дает эпюру $BECMD$ (фиг. 90).

Тангенциальное напряжение в среднем диаметре при

$$\left(\frac{S}{b}\right)_{max} = \frac{D}{12}(1 + c + c^2);$$

$$T_{max} = \frac{16\, Q(1 + c + c^2)}{3\pi(1 - c^4)D^2}; \tag{96}$$

$$\beta_{кольцев.\ площ.} = \frac{4}{3} \cdot \frac{1 + c + c^2}{1 + c^2}. \tag{97}$$

При $c=0$ получается формула (93); второй же предел при $c=1$ есть 2. Это значит, что в полой круглой тонкостенной балке T_{max} почти вдвое больше, чем $T_{сред}$.

6. Ромб. Форма сечения, встречающаяся очень редко, но чрезвычайно интересная с теоретической стороны (фиг. 91—92), как имеющая два максимума T. T_{max} находятся на $\frac{h}{8}$ от нейтральной оси и

$$T_{max}=\frac{9}{8}\cdot\frac{Q}{F}, \tag{98}$$

т.-е.

$$\beta_{ромба}=\frac{9}{8}. \tag{99}$$

7. Двутавровое сечение (фиг. 92—94). До горизонта F (фиг. 93) эпюра BE идет как в прямоугольнике, с тою разницей, что J здесь не сплошного прямоугольника $GHKL$, а двутаврового сечения

$$J=\frac{bh^3-h_1^3(b-b_1)}{12}, \tag{100}$$

но все же уравнение BF есть, как и там,

$$T=\frac{Q}{2J}\left(\frac{h^2}{4}-y^2\right).$$

В горизонте F происходит внезапное увеличение T, причем

$$\frac{PN}{PF}=\frac{b}{b_1},$$

и далее, подставляя S как сумму статических моментов верхнего прямоугольника и прямоугольника $TUVX$, получим уравнение кривой NM (фиг. 94)

$$T=\frac{Q}{Jb_1}\left[\frac{b(h-h_1)}{2}\cdot\frac{h+h_1}{4}+\left(\frac{h_1}{2}-y\right)b_1\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{h_1}{2}+y\right)\right],$$

или

$$T=\frac{Q}{Jb_1}\left[\frac{bh^2}{8}-\frac{bh_1^2}{8}\left(1-\frac{b_1}{b}\right)-\frac{b_1y^2}{2}\right]$$

— квадратная парабола, где J попрежнему есть момент инерции всего двутаврового сечения. При $y=0$ получается

$$T_{max}=\frac{Q}{8Jb_1}[bh^2-bh_1{}^2+b_1h_1{}^2], \tag{101}$$

$$\beta_{двутавра}=\frac{3}{2}\cdot\frac{b\left(1-\frac{h_1}{h}+\frac{b_1h_1}{bh}\right)\left(1-\frac{h_1{}^2}{h^2}+\frac{b_1h_1{}^2}{bh^2}\right)}{b_1\left(1-\frac{h_1{}^3}{h^3}+\frac{b_1h_1{}^3}{bh^3}\right)}, \tag{102 a}$$

или, обозначив отношения

$$\frac{b_1}{b} = B \quad \text{и} \quad \frac{h_1}{h} = H, \tag{102b}$$

$$\beta_{\substack{двутавра \\ швеллера}} = \frac{3}{2} \cdot \frac{(1 - H + BH)(1 - H^2 + BH^2)}{B(1 - H^3 + BH^3)}. \tag{102}$$

Совершенно такие же выражения получатся и у швеллерного сечения при аналогичных обозначениях (фиг. 95).

Профили существующих железных балок имеют закругления, уничтожающие на эпюре скачок величины T (фиг. 94) FN, там будет получаться пунктирная кривая, но если, как обычно, брать среднюю толщину горизонтальной полки, указанную в сортаменте железа (что дает практически незаметную ошибку), то для русского сортамента β находится в пределах:

двутавровое сечение	№ 8	$\beta = 3{,}20$
„ „	№ 40	1,19
швеллерное „	№ 5	5,00
„ „	№ 30	2,26

Отодвигая в балках уширенные части к внешним краям по высоте и делая среднюю стенку тонкой, мы создаем брус чрезвычайно рациональной формы для изгиба, так как получаем при малом весе высокий момент инерции и, следовательно, большое W. Но средняя тонкая стенка всегда нуждается в проверке T-напряжения. Это замечание относится ко всем вообще рациональным балкам и в особенности к клепанным, пример эпюры которых дан на фиг. 96—97. При написании формул здесь правильнее брать S_{brutto}, т.-е. без вычета заклепочных отверстий, а J_{netto}, т.-е. вычтя их; но в виду того, что оба эти момента лишь весьма мало изменяются от заклепочных отверстий, в расчетах часто берут оба момента brutto, но зато учитывают ослабление заклепками стенки в величине b. Теоретически же говоря, формула $T = \frac{QS}{Jb}$ выведена в предположении непрерывного изменения S и J, между тем, заклепки вносят некоторую прерывность в эти величины, хотя по чрезвычайной малости разницы между brutto и netto это обстоятельство не имеет значения.

Точно так же нуждаются в поверке T все деревянные балки, целые и срощенные (опасность расслаивания).

§ 28. Теоретические дополнения к T-напряжению при поперечном изгибе. Несмотря на простоту формулы $T = \frac{QS}{Jb}$, внутренний смысл этого соотношения далеко не так элементарен, как у соответствующей формулы $H = \frac{My}{J}$ нормального напряжения. Вернемся к рассмотренному круглому сечению фиг. 86—87 и 98. Если бы полное T

в крайней точке горизонта K (фиг. 98) было вертикально, то существовала бы некоторая слагающая его T_r, направленная по радиусу. Вследствие парности тангенциальных напряжений, T_r требует, чтобы в плоскости перпендикулярной, т.-е. по образующей цилиндра, действовало также T_r, но его там нет; следовательно, полное T в точке K должно итти непременно по касательной к окружности KP. В точке M T в силу симметрии направлено вверх. Итак, к краям горизонта полные T растут (фиг. 99), ибо вертикальные слагающие T остаются постоянными (все они параллельны Q). Для построения эпюры AB полных напряжений T в горизонте KL нужно знать направление их в прочих точках этого горизонта. Естественно ожидать, что эти направления представляют постепенный переход от вертикали к наклону касательной. Так как у круга средний вектор и два крайние касательные проходят через полюс P, то для круга естественно сделать предположение, что и все прочие полные напряжения T хорды KL проходят через эту же точку.

Можно доказать, что это предположение ничему не противоречит.

Пусть на хорде KL взята произвольная точка D, относительно которой нужно доказать, что ее напряжение проходит через полюс P. Взятие одной силы Q, перпендикулярной к KL, не доказывает требуемого. Для получения необходимых соотношений желательно иметь две силы, или две составляющие Q. Пусть, поэтому, Q взято перпендикулярно к диаметру, проходящему через точку D, и будут по принципу сложения рассматриваться ее составляющие $Q\,\mathrm{sn}\,\alpha$ и $Q\,\mathrm{cs}\,\alpha$ (фиг. 100). Если предполагаемое справедливо, то от силы $Q\,\mathrm{sn}\,\alpha$ получится напряжение DE (проходит через полюс P), а от силы $Q\,\mathrm{cs}\,\alpha$—напряжение DF (проходит через R). Самая поверка заключается в том, что сумма векторов DE и DF должна оказаться равной заранее известной величине DG, которая, находясь на диаметре DO, конечно, ему перпендикулярна и равна T_{max};

(92) $$DG = \frac{Qr^2}{3J}.$$

DN получается по основной формуле от силы $Q\,\mathrm{sn}\,\alpha$:

$$DN = \frac{Q\,\mathrm{sn}\,\alpha\,(r^2 - y^2)}{3J}.$$

Аналогично,

$$DS = \frac{Q\,\mathrm{cs}\,\alpha\,(r^2 - x^2)}{3J}.$$

$$\mathrm{cs}\,\beta = \frac{MP}{PD}; \quad \mathrm{cs}\,\gamma = \frac{CR}{RD}; \quad KM^2 = r^2 - y^2; \quad HC^2 = r^2 - x^2.$$

Так как касательные проведены в точках K и H,

$$KM^2 = MP\cdot y; \quad MP = \frac{r^2 - y^2}{y};$$

$$HC^2 = CR\cdot x; \quad CR = \frac{r^2 - x^2}{x};$$

$$PD = \sqrt{\left(\frac{r^2 - y^2}{y}\right)^2 + x^2}; \quad RD = \sqrt{\left(\frac{r^2 - x^2}{x}\right)^2 + y^2};$$

$$\mathrm{cs}\,\beta = \frac{r^2 - y^2}{\sqrt{(r^2 - y^2)^2 + x^2y^2}} = \frac{r^2 - y^2}{C};$$

$$\cos\gamma = \frac{r^2 - x^2}{\sqrt{(r^2 - x^2)^2 + x^2 y^2}} = \frac{r^2 - x^2}{D};$$

$$DE = \frac{DN}{\cos\beta} = \frac{Q \sin\alpha \cdot C}{3J}; \quad DF = \frac{DS}{\cos\gamma} = \frac{Q \cos\alpha \cdot D}{3J}.$$

На основании сказанного о DG (фиг. 101 и 100)

$$\varepsilon + \beta + \alpha = 90^\circ,$$
$$\delta + \gamma + 90^\circ - \alpha = 90^\circ,$$

т.-е.

$$\delta = \alpha - \gamma;$$
$$\varepsilon = (90^\circ - \alpha) - \beta,$$
$$\cos\delta = \cos(\alpha - \gamma) = \cos\alpha \cos\gamma + \sin\alpha \sin\gamma; \quad \text{(a)}$$
$$\cos\varepsilon = \cos[(90^\circ - \alpha) - \beta] = \sin\alpha \cos\beta + \cos\alpha \sin\beta; \quad \text{(b)}$$

$$\cos\alpha = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}; \quad \sin\alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}};$$

$$\sin\beta = \sqrt{1 - \cos^2\beta} = \sqrt{1 - \frac{(r^2 - y^2)^2}{C^2}} = \frac{xy}{C};$$

$$\sin\gamma = \sqrt{1 - \cos^2\gamma} = \frac{xy}{D};$$

(a) $$\cos\delta = \frac{y(r^2 - x^2)}{\sqrt{x^2 + y^2} \cdot D} + \frac{x \cdot xy}{\sqrt{x^2 + y^2} \cdot D} = \frac{r^2 y}{D \cdot \sqrt{x^2 + y^2}};$$

(b) $$\cos\varepsilon = \frac{x(r^2 - y^2)}{\sqrt{x^2 + y^2} \cdot C} + \frac{y \cdot xy}{\sqrt{x^2 + y^2} \cdot C} = \frac{r^2 x}{C \cdot \sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Из фиг. 101

$$DE \cdot \cos\varepsilon + DF \cdot \cos\delta = DG =$$

$$= \frac{Q \sin\alpha \cdot C}{3J} \cdot \frac{r^2 x}{C\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{Q \cos\alpha \cdot D}{3J} \cdot \frac{r^2 y}{D\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{Qr^2}{3J} \quad \text{(верно).}$$

Перед радикалами выбирался знак $+$, так как участвующие в доказательстве углы все острые.

Итак, в круглом сечении тангенциальные напряжения изгиба во всех точках горизонта проходят через общий полюс, в котором пересекаются касательные, проведенные в крайних точках горизонта. На этом основании построена фиг. 99.

В сечениях произвольного криволинейного контура явление должно происходить в обобщенном виде, т.-е. напряжения наклоняются под разными углами, но полюса, вообще говоря, не имеют. Вертикальные составляющие, параллельные Q, определяются по основной формуле. В наклонных к вертикали прямолинейных периметрах контура сечения T-напряжение, на основании предыдущего, должно итти по направлению этих прямых (фиг. 102), и только в прямоугольнике или также при боковых сторонах, параллельных силе Q, оно постоянно во всех точках горизонта. Поэтому и в закруглениях фасонного железа (двутавровых балках, швеллерах и пр.) появляются при изгибе наклонные T-напряжения. Только в круглом и прямоугольном сечениях T-напряжения полностью известны в любой

точке. В остальных случаях приходится довольствоваться знанием их составляющих, параллельных поперечной силе Q.

Практически, однако, этот наклон не так много изменяет величину их, тем более, что тангенциальные напряжения в брусьях и балках, вообще говоря, невелики по сравнению с нормальными (последние растут по мере увеличения M, т.-е. длин, плеч моментов).

Рассмотренные выводы дают несколько более общее и углубленное представление о T-напряжениях при поперечном изгибе.

§ 29. Цифровой подсчет $\frac{H_{max}}{T_{max}}$. Найти отношение $\frac{H_{max}}{T_{max}}$ в балке фиг. 60—63, двутавровой № 30.

$$H_{max} = \frac{M_{max}}{W} = \frac{700000}{592} = 1182 \text{ kgcm}^{-2}$$

$$Q_{max} = 8 \text{ tn} = 8000 \text{ kg};$$

$$T_{max} = \frac{8000\,[12{,}1\,(900 - 728) + 1{,}05 \cdot 728]}{8 \cdot 8881 \cdot 1{,}05} = 302 \text{ kgcm}^{-2} \tag{101}$$

или, если известно для ⌶ № 30 $\beta = 2{,}42$, тогда по площади профиля 63,61 cm² сразу

$$T_{max} = 2{,}42 \cdot \frac{8000}{63{,}61} = 305 \text{ kgcm}^{-2},$$

откуда

$$\frac{H_{max}}{T_{max}} = \frac{1182}{305} = 3{,}87.$$

В балках прямоугольной, квадратной и круглой T_{max} значительно меньше, а отношение соответственно больше.

VIII. Графические методы.

§ 30. Нахождение деформации балки помощью веревочного многоугольника. В основу всех технических дисциплин желательно ставить аналитический метод, как непогрешимый в собственной своей сущности. Иметь для всех многочисленных технических величин соотношения в виде готовых, доказанных аналитических уравнений является идеалом знания.

Несмотря на колоссальную продвинутость Математики как науки, дающую уже теперь возможность решать чрезвычайно сложные вопросы, она не может еще охватывать собою всех явлений, интересных для Техники. Она является основным, непогрешимым и могущественным орудием, всегда необходимым, но невсегда достаточным.

Может быть даже она и во всех случаях, требующихся Технике, способна придать величинам жизни аналитическое выражение; но в некоторых частных случаях выражение это может оказаться слишком сложным и будет требовать очень большого времени для вычислений или иногда недоступным для решения.

Дополнением и поддержкой Математики в этих случаях являются: 1) опыт и 2) графические способы.

Как уже известно, Сопротивление Материалов, ставя в основу получение аналитических соотношений, черпает часть величин, главным образом характеризующих физическую природу каждого материала, из опыта. Таким путем были установлены закон Гука и гипотеза Бернулли.

В основу нахождения деформаций балки был также поставлен аналитический способ в виде уравнения $EJ\frac{d^2y}{dx^2}=\pm M$, но, пользуясь этим уравнением, оказалось возможным дать графоаналитический способ, в котором чертеж в значительной мере помогает вычислению и очень хорошо геометрически иллюстрирует его.

Ниже будет указан еще один чистый аналитический способ нахождения деформаций упругих систем, еще более точный, чем уже указанный для балки, и совершенно общий для любых систем.

Можно предложить и исключительно графическое построение деформаций, где уравнений входить не будет. Графические способы (базируясь, конечно, на Математике), вследствие своей наглядности, быстроты решения и в большинстве случаев совершенно достаточной точности (при аккуратном исполнении чертежа), часто применяются вместо аналитических. Последние остаются частично для поверки и полностью — в тех случаях, когда точность графических способов недостаточна.

Рассмотрим графическое нахождение деформаций балки, пока при постоянной жесткости $EJ=Const$. Способ основан на веревочном многоугольнике. Сперва необходимо рассмотреть некоторые основные задачи Графостатики, ограничиваясь параллельными силами, ибо только перпендикулярные к оси балки силы производят поперечный изгиб.

1. Графическое нахождение момента сосредоточенных сил A, 1 и 2 (фиг. 103 — 104) производится построением силового многоугольника $abcd$ и веревочного $I\ A\ II\ 1\ III\ 2\ IV$, крайние стороны которого I и IV пересечением своим определяют точку приложения равнодействующей ad (фиг. 104) и плечо ее момента h относительно центра моментов C. Тогда, вследствие того что поштрихованные треугольники подобны,

$$R:H=\mu:h;$$

откуда момент

$$M=Rh=\mu H, \tag{103 a}$$

т.-е. в масштабе равен произведению отрезка μ, отделяемого крайними сторонами веревочного многоугольника на прямой, проведенной через центр моментов параллельно силам, на полюсное расстояние H. Численная величина M получится умножением μH на произведение масштабов сил и длин, т.-е. если, например, для сил $1\,\mathrm{mm}-0{,}1\frac{\mathrm{tn}}{\mathrm{mm}}$ и для длин $1\,\mathrm{mm}-1\frac{\mathrm{cm}}{\mathrm{mm}}$, то на $0{,}1\cdot 1=0{,}1\frac{\mathrm{tncm}}{\mathrm{mm}^2}$ для получения момента в tncm.

Можно правило построения момента выразить также так (в применении к каждой отдельной силе): нужно провести через заданный

центр моментов прямую, параллельную силам, и засечь на ней отрезок продолжением тех двух сторон веревочного многоугольника, через пересечение которых проходит данная сила (доказательство из подобия треугольников).

Так, момент силы A есть DE, силы $1-DF$, силы $2-FG$; понятно поэтому, что момент всех трех сил есть разность GE.

Если масштаб сил обозначить $[P]$ (единица: $\frac{\text{tn}}{\text{mm}}$ или ей однородная), масштаб длин $[l]$ (единица: $\frac{\text{m}}{\text{mm}}$ или ей однородная), то формулу (103 а) можно представить подробно так:

$$\overset{\text{tn m}}{M} = \overset{\text{mm}}{\mu}\ \overset{\text{mm}}{H}\ [P]^{\frac{\text{n}}{\text{mm}}}\,[l]^{\frac{\text{m}}{\text{mm}}} \qquad (103)$$

(единицы могут быть заменены однородными).

Произведение масштабов сил и длин проистекает оттого, что одна из величин чертежа представляет по смыслу силу, другая — длину. В виду того, что эти масштабы перемножаются, в самой формуле (103) неважно знать, к какой именно из величин относить тот или иной масштаб; для увязки же формулы (103) с прочими — необходимо эти масштабы отделить. Именно, μ присущ масштаб длины, а полюсному расстоянию H — масштаб силы, что вполне естественно, так как при рассмотрении силового многоугольника мы, рассуждая о разложении сил, пользуемся его лучами, как силами, значит и H есть тоже сила.

2. Момент от сплошной нагрузки (фиг. 105 — 106). Необходимо разделить нагрузку параллельными сечениями на элементы, можно не очень узкие. В центре тяжести каждого элемента прикладывается в масштабе соответствующая ему сосредоточенная сила (так называемая частная равнодействующая) и строится веревочный многоугольник. При неограниченном увеличении числа делений веревочный многоугольник должен обратиться в веревочную кривую. Можно доказать, что веревочная кривая касается веревочного многоугольника в точках, лежащих на продолжениях делящих прямых.

В самом деле, точки веревочного многоугольника частных равнодействующих, находящиеся на этих продолжениях, действительно принадлежат веревочной кривой, ибо, по предыдущему, какой-либо отрезок DE (будучи умножен на полюсное расстояние) представляет момент относительно точки F сил 1, 2 и 3, т.-е нагрузки $KFGH$ (фиг. 105), а RL представляет момент той же нагрузки относительно C. Следовательно, для получения веревочной кривой нужно вписать по лекалу кривую в многоугольник так, чтобы она касалась его в точках на продолжениях делящих нагрузку прямых. Момент всей заданной нагрузки относительно точки C определяется отрезком QR, который отсекается на прямой, параллельной силам и проходящей через C, двумя крайними касательными веревочной кривой.

NQ—прямая линия, ибо здесь сплошная нагрузка уже кончилась.

3. Поперечная сила в сечении графически получается на силовом многоугольнике. Она определяется отрезком прямой сил сило-

вого многоугольника, отсекаемым лучами, параллельными тем сторонам веревочного многоугольника, которые перерезаются вертикалью проводимого сечения.

4. На основании уже известного графоаналитического способа обе деформации балки находятся путем дважды произведенного построения: прежде строится эпюра моментов от заданной нагрузки, а затем эпюра от эпюры. Полученная кривая представляет упругую линию в сильно увеличенном масштабе прогибов, так как каждая ордината кривой не разделена еще на очень большую числовую величину EJ, а пролет балки начерчен в уменьшенном виде.

Если ординату второй веревочной кривой назвать η, то ее масштаб, как и у μ, есть масштаб длины $[l]$; второе полюсное расстояние (H) должно иметь тот же масштаб, что и силы, входящие во второй силовой многоугольник; но эти силы суть площади эпюры моментов; их размер: $\mathrm{tnm \cdot m = tnm^2}$, а масштаб, на который нужно умножать (H), можно соответственно предыдущему представить так: $[\Omega]\ \dfrac{\mathrm{tnm^2}}{\mathrm{mm}}$.
Отсюда окончательное выражение прогиба в любой точке

$$\overset{\mathrm{m}}{y} = \overset{\mathrm{mm}}{\eta}\ \overset{\mathrm{mm}}{(H)}\ \overset{\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{mm}}}{[l]}\ \overset{\frac{\mathrm{tnm^2}}{\mathrm{mm}}}{[\Omega]}\ \overset{\mathrm{tn^{-1}m^{-2}}}{\frac{1}{EJ}}. \tag{104}$$

Пример такого решения представлен на фиг. 107 — 110, масштабы указаны на чертеже, жесткость обозначена EJ.

Из чертежа $\eta = 166\,\mathrm{mm}$, откуда, так как $(H) = 50\,\mathrm{mm}$ [1]),

(104) $$y_B = 166 \cdot 50 \cdot \frac{1}{40} \cdot \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{EJ} = \frac{20{,}8}{EJ}\ \mathrm{m}\ ^{2)}.$$

[Аналитическое выражение стрелы прогиба балки, нагруженной единственной силой на конце, есть $\dfrac{Pl^3}{3\,EI}$, что в данном случае может послужить поверкой;

$$y_B = \frac{4 \cdot (2{,}5)^3}{3 \cdot EJ} = \frac{20{,}8}{EJ}.\ ]$$

Подобным же образом легко строится и угол упругой линии. По правилу 3) поперечная сила в точке B есть весь отрезок $1 - 5 = 125\,\mathrm{mm}$ на силовом многоугольнике (фиг. 110), откуда

$$\vartheta_B = 125 \cdot \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{EJ} = \frac{12{,}5}{EJ},$$

что подтверждается и известной аналитической формулой этого угла $\dfrac{Pl^2}{2EJ}$

---

[1]) Клише уменьшено против оригинала в $\dfrac{166}{124{,}8} = 1{,}33$ раза.

[2]) $[l] = \dfrac{2.5}{100} = \dfrac{1}{40}\ \dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{mm}}$; $[\Omega] = \dfrac{2{,}5 \cdot 4 \cdot 2{,}5}{2 \cdot 125} = 0{,}1\ \dfrac{\mathrm{tnm^2}}{\mathrm{mm}}$.

$$\theta_B = \frac{4 \cdot (2{,}5)^2}{2 \cdot EJ} = \frac{12{,}5}{EJ},$$

вообще же, если назвать отрезок на силовом многоугольнике, отсекаемый лучами, параллельными тем сторонам веревочного многоугольника, которые перерезаются проводимой вертикалью сечения, через k, то

$$\theta = \overset{mm}{k} \cdot \overset{\frac{tn\,m^2}{mm}}{[\Omega]} \cdot \overset{tn^{-1}\,m^{-2}}{\frac{1}{EJ}} \cdot \qquad (105)$$

В табл. I величины, участвующие в построениях, указаны в своем масштабном и истинном значении (единицы могут быть заменены однородными).

ТАБЛИЦА I.

№№	Величина	Обозначение на чертеже	Измерение на чертеже	Истинное измерение	Масштаб
1	Ордината 1-го веревочного многоугольника (момент)	μ	mm	m	1 mm — $[l]\frac{m}{mm}$
2	Полюсное расстояние 1-го веревочного многоугольника (момент)	H	mm	tn	1 mm — $[P]\frac{tn}{mm}$
3	Сила 1-го веревочного многоугольника	P	mm	tn	аналогичен H
4	Ордината 2-го веревочн. многоугольника (прогиб)	η	mm	m	1 mm — $[l]\frac{m}{mm}$
5	Полюсное расстояние 2-го веревочн. многоугольника	(H)	mm	tn m²	1 mm — $[\Omega]\frac{tn\,m^2}{mm}$
6	Сила 2-го веревочного многоугольника	k	mm	tn m²	аналогичен (H)
7	Жесткость	EJ	mm	tn m²	аналогичен (H)

5. Второй способ построения деформаций балки. Здесь момент и поперечная сила, как таковые, не определяются.

Пусть дана некоторая сплошная нагрузка, переменная интенсивность которой на единицу длины есть q (фиг. 111—114). Сначала силовой многоугольник построен с полюсом O', затем для получения горизонтальной замыкающей полюс перенесен на один уровень с точкой R (OR || верхней замыкающей). В окончательной веревочной кривой взята произвольная ордината μ, в конце которой D проведена касательная к кривой. Тогда из подобных треугольников (OE || DF), зная, что RE представляет собою разность левой опорной реакции A и нагрузки AHK на длине x

$$RE = A - \text{нагр.}\, AHK = A - \int_0^x q\,dx,$$

получается

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{d\mu}{dx} = \frac{\mu}{a} = \frac{RE}{H} = \frac{A - \int_0^x q\,dx}{H},$$

откуда, после дифференцирования равенства по x,

$$d\left(\frac{d\mu}{dx}\right) = \frac{d}{H}\left(A - \int_0^x q\,dx\right),$$

$$\frac{d^2\mu}{dx^2}dx = -\frac{q\,dx}{H},$$

$$\frac{d^2\mu}{dx^2} = -\frac{q}{H}. \tag{106}$$

Конструкция формулы одинакова с другой

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{M}{EJ} \tag{77a}$$

(ось μ и y направлены вниз).

Следовательно, если вместо q поставить ординату M площади эпюры моментов, а полюсное расстояние взять EJ, то y-ки, т.-е. упругую линию, можно построить как ординаты моментов μ.

Этим способом прогибы должны получаться прямо в натуральную величину, без пользования масштабом.

Нетрудно доказать это обстоятельство и на основании предыдущего построения 4. Действительно, основа построения 4 есть формула (103 а) (фиг. 103—104) $Rh = \mu H$. Так как $Rh = Const$, то

$$\mu H = Const, \tag{107}$$

т.-е. μ и H обратно-пропорциональны. Значит, если исходить из подлинного полюсного расстояния EJ, то в построении 4 полюсное расстояние, равное $(H)[\Omega]$ tnm² (его натуральная величина), уменьшено в $\frac{EJ}{(H)[\Omega]}$ раз; от этого прогиб увеличился против истинного прогиба y во столько же раз и сделался равным

$$y \cdot \frac{EJ}{(H)[\Omega]}.$$

Но у длин на чертеже есть свой масштаб $[l]$, натуральная величина ординаты η есть $\eta[l]$, которая из формулы (104) равна

$$\eta[l] = y \cdot \frac{EJ}{(H)[\Omega]},$$

т.-е. тому же самому выражению.

Значит, при полюсном расстоянии EJ получаются прогибы в натуральную величину; следовательно, и углы упругой линии получатся настоящие, если только пролет балки будет начерчен в натуральную величину.

Это заключение вполне отвечает и формуле (105), потому что $\operatorname{tg}\theta$ в натуре есть отношение $\frac{k \cdot [\Omega]}{EJ}$, что дает ту же формулу (105).

В действительности, в виду того, что EJ по сравнению с площадями эпюры моментов очень велико, отложить его в том же масштабе, как и эти площади, затруднительно (например, если на фиг. 107 считать, что балка представляет собою железный брус квадратного сечения и имеет $H_{\partial} = 1200$ kgcm^{-2}, то сторона сечения определяется из уравнения

$$\frac{a^3}{6} \cdot 1200 = 4000 \cdot 250; \quad a = 17{,}1 \text{ cm} = \infty\, 17 \text{ cm};$$

отношение

$$\frac{EJ}{\Omega} = \frac{17^4 \cdot 2000000 \cdot 2}{12 \cdot 4000 \cdot 250^2} = \infty\, 110),$$

и потому откладывают в качестве полюсного расстояния не всё EJ, а часть его $\frac{EJ}{n}$, вследствие чего прогибы, не считая масштаба длин, увеличиваются в n раз.

Подставляя в (104) вместо $(H)[\Omega]$ величину $\frac{EJ}{n}$, получим прогиб в натуру по формуле

$$y^{\text{m}} = \frac{\eta^{\text{mm}} \cdot [l]^{\frac{\text{m}}{\text{mm}}}}{n}. \tag{108}$$

Углы упругой линии (точно говоря, тангенсы углов) при условии, что $\frac{EJ}{n}$ и $k\cdot[\Omega]$, т.-е. полюсное расстояние и силы отложены в одинаковом масштабе, получаются на чертеже увеличенными в n раз.

§ 31. Графическое решение балки. Графическое решение балки § 21 (фиг. 115—119). Пролет 160 mm[1] — 8 m; $[l]=\frac{1}{20}\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{mm}}$; $H=50$ mm.

Сила $P=6$ tn выражается отрезком 30 mm; $[P]=0{,}2\,\frac{\mathrm{tn}}{\mathrm{mm}}$.

Из фиг. 117 $KL=14$ mm; момент в точке B

$$M_B=14\cdot 50\cdot\frac{1}{20}\cdot 0{,}2=7\ \mathrm{tnm}, \tag{103}$$

согласно с прежним.

Натуральная величина элемента *7* эпюры моментов при $KL=$ $=7$ tnm и $BP=1$ m равна 3,45 tnm², выражается она отрезком в 30 mm; $[\Omega]=\frac{3{,}45}{30}=0{,}115\,\frac{\mathrm{tnm}^2}{\mathrm{mm}}$. Отрезок OE, считаемый по вертикали от прямой OF, преведенной через точки опоры A и B (фиг. 119), равен $\eta=19$ mm; $(H)=80$ mm; отсюда

$$y=\frac{19\cdot 80\cdot\frac{1}{20}\cdot 0{,}115}{EJ}=\infty\,\frac{8^3/_4}{EJ}\ \mathrm{m} \tag{104}$$

— прежний результат.

Можно доказать, что и по второму способу построения получится то же самое. Тогда полюсным расстоянием должна служить величина (будем, наоборот, искать n) 80 mm:

$$80=\frac{EJ}{n\cdot[\Omega]}=\frac{EJ}{n\cdot 0{,}115}\ \mathrm{mm};\qquad n=\frac{EJ}{80\cdot 0{,}115},$$

откуда

$$y=\frac{19\cdot\frac{1}{20}}{n}=\frac{\frac{1}{20}\cdot 19\cdot 80\cdot 0{,}115}{EJ}; \tag{108}$$

тот же результат.

§ 32. Нахождение статического момента и момента инерции фигуры помощью веревочного многоугольника. Подобным же образом графически находятся статические моменты и моменты инерции фигур каких-угодно очертаний (вопрос, не всегда доступный аналитическому решению).

Нахождение статического момента (фиг. 120—122) ничем не отличается от нахождения момента сил. Считая приложенные к центрам тяжести элементов векторы *1*, *2*, *3*, ..., изображающие площади, за силы, утверждаем по предыдущему, что AB представляет в масштабе по умножении на полюсное расстояние момент вектора *1* от-

---

[1]) Клише уменьшено против оригинала в $\frac{160}{120}=1{,}33$ раза.

носительно оси статических моментов YY; BC — момент вектора *2* и т. д. Статический момент всей фигуры относительно оси YY есть в масштабе отрезок AF, отсекаемый крайними сторонами веревочного многоугольника на оси YY, умноженный на полюсное расстояние H.

Обозначив по прежнему $AF = \mu$, имеем, переходя к натуральной величине,

$$S^{cm^3} = \mu^{mm} \cdot H^{mm} \cdot [l]^{\frac{cm}{mm}} \cdot [F]^{\frac{cm^2}{mm}} \tag{109}$$

Теперь полюсное расстояние, как и векторы *1, 2, 3,* . . . , имеет масштаб площади $[F]^{\frac{cm^2}{mm}}$.

Для оси ZZ статический момент фигуры есть PH, а для оси OO, проходящей через центр тяжести фигуры, обе крайние стороны веревочного многоугольника проходят через точку Q, что еще раз подтверждает, что статический момент фигуры относительно оси, проходящей через центр тяжести ее, равен 0.

Заметим, что вписывать в веревочный многоугольник веревочную кривую для нахождения статического момента не нужно, потому что она все равно прошла бы через ту же точку A, и NF есть так же касательная к ней.

2. Пусть требуется найти момент инерции фигуры относительно той же оси YY. Момент инерции элемента площади 1 есть произведение его площади на квадрат расстояния до оси YY (в предположении, что элемент достаточно мал)

$$J_1 = F_1 \cdot u^2,$$

или, так как $F_1 \cdot u = S_1$, статическому моменту элемента F_1, то

$$J_1 = S_1 \cdot u.$$

Но в масштабе $S_1 = AB \cdot H$, поэтому

$$J_1 = AB \cdot H \cdot u = 2 \cdot H \cdot \text{площ.}\, ABI.$$

Так же

$$J_2 = 2 \cdot H \cdot \text{площ.}\, BCK \quad \text{и} \quad J_3 = 2 \cdot H \cdot \text{площ.}\, CDL$$

и т. д.; поэтому в сумме

$$J_1 + J_2 + J_3 + \ldots = J = 2 \cdot H \cdot \text{площ.}\, AIKLMNF. \tag{110 a}$$

Для того, чтобы результат был вполне точен, нужно было бы разбить фигуру на бесконечное множество очень узких элементов; но то же самое получится, если в имеющийся веревочный многоугольник вписать веревочную кривую. Тогда в (110 а) площадь вере-

вочного многоугольника заменится площадью веревочной кривой. Называя эту площадь Φ и переходя от величин на чертеже к натуральным величинам, т.-е. умножая на масштабы, получим

$$\overset{\text{cm}^4}{J} = 2\overset{\text{mm}}{H} \cdot \overset{\text{mm}^2}{\Phi} \cdot [F]^{\frac{\text{cm}^2}{\text{mm}}} \cdot \left([l]^{\frac{\text{cm}}{\text{mm}}}\right)^2. \qquad (110)$$

Итак, момент инерции фигуры относительно произвольной оси равен в масштабе удвоенному полюсному расстоянию, умноженному на площадь веревочной кривой, ограниченной самой кривой, двумя крайними касательными к ней и осью, относительно которой ищется момент инерции.

Момент инерции относительно оси ZZ представляется в масштабе поштрихованной площадью $IKLMNPGHI$, умноженной на удвоенное полюсное расстояние, а относительно OO — площадью $IKLMNQI$ с тем же умножением. Это подтверждает, что момент инерции относительно центральной оси есть самый малый из моментов инерции того же направления, и, кроме того, дает графическое изображение добавка Fa^2, получающегося при написании момента инерции относительно оси, не проходящей через центр тяжести фигуры [формула (28)]; оказывается, этот добавок соответствует площади PQH.

§ 33. Графическое нахождение момента инерции. Хотя графически интересно строить моменты инерции фигур, трудно поддающихся аналитическому решению, но ради удобства числового сравнения на фиг. 123—125 взят простой пример, для которого заранее известно, что

$$(28) \qquad J_y = \frac{6 \cdot 18^3}{12} + 6 \cdot 18 \cdot 3^2 = 388 \text{ cm}^4.$$

Площадь веревочной кривой была разбита указанным образом, и отдельные ее элементы дают в mm^2 [1]):

$$13 + 13 + 238 + 5 + 5 + 24 = 298 \text{ mm}^2.$$

Так как все входящие в построение величины можно заменять однородными, то пусть данное вычисление производится в cm. Тогда

$$\Phi = 298 \text{ mm}^2 = \infty 300 \text{ mm}^2 = 3 \text{ cm}^2.$$

Площадь веревочной кривой имеет, конечно, масштаб длины в квадрате $[l]^2$. На чертеже 1 cm изображает 3 cm, поэтому

$$[l] = 3^{\frac{\text{cm}}{\text{cm}}}.$$

---

[1]) На оригинале расстояние между вертикальными делящими прямыми 10 mm; клише уменьшено в 1,33 раза.

H взято 4 cm; на силовом многоугольнике натуральная площадь в $3 \cdot 6 = 18$ cm² изображена отрезком в 1 cm, откуда масштаб полюсного расстояния

$$[F] = 18^{\frac{cm^2}{cm}};$$

(110) $$J = 2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 18 \cdot 3^2 = 3888 \text{ cm}^4.$$

IX. Максимальный прогиб балки.

§ 34. Нахождение максимального прогиба балки способами: аналитическим, графоаналитическим и графическим. Нахождение приближенного корня уравнения степени выше 2-ой. Способ Ньютона. Способ reguli falsi. В некоторых случаях представляет большой интерес нахождение максимальных деформаций балки, ибо очень часто бывает недостаточно гарантировать величину одного лишь максимального напряжения; получаемая максимальная деформация должна быть сравнена с некоторой допустимой.

Найдем максимальный прогиб балки § 21.

1. Аналитический способ. Уравнение среднего участка упругой линии

$$y_2 = \frac{1}{EJ}\left[\frac{x^4}{12} - \frac{7}{6}\left(x-1\right)^3 + 8^2/_3 x - 8^3/_4\right].$$

Составляем уравнение:

$$\frac{dy_2}{dx} = 0;$$

$$\frac{4x^3}{12} - \frac{7 \cdot 3(x-1)^2}{6} + 8^2/_3 = 0;$$

$$x^3 - 10{,}5x^2 + 21x + 15{,}5 = 0.$$

Так как получить нужно один арифметический и притом положительный корень уравнения (остальные два корня будут или мнимые и сопряженные или, вообще, не отвечающие условиям балки), то простейший способ решения — построить в осях кривую

$$y = x^3 - 10{,}5x^2 + 21x + 15{,}5$$

и найти из чертежа координату x_1 пересечения кривой с осью x

$$x_1 = \infty 3{,}7.$$

При построении нужно давать переменному x только значения, возможные для данного случая балки; здесь по условию задачи видно, что x_1 должен содержаться между 3 и 5.

Подстановка 3,7 m в уравнение упругой линии дает

$$y_{max} = \frac{16}{EJ} \text{ m}.$$

Но если пределы корня относительно широки, и предыдущий способ потребует многих подсчетов, тогда можно пользоваться для приближенного нахождения корня способом Ньютона или способом reguli falsi.

Способ Ньютона состоит в последовательном проведении касательных к кривой так, что они, пересекаясь с осью x, наносят на ней точки все ближе и ближе к истинной точке пересечения кривой с осью x. Пусть a и b (фиг. 126) пределы корня x_1, так что $a < x_1 < b$. Из треугольника ABN, в котором NB — касательная в точке N к кривой $y = f(x)$,

$$AB = \frac{NA}{\operatorname{tg} ABN} = \frac{f(b)}{f'(b)},$$

так что разность $OB = OA - AB$ можно представить равенством

$$x' = b - \frac{f(b)}{f'(b)}, \tag{111}$$

или так же (фиг. 127)

$$x' = a - \frac{f(a)}{f'(a)} \tag{112}$$

(знак — остается, так как $\operatorname{tg} MBD$ отрицателен).

Здесь x' — первое приближение к корню.

Можно повторить проведение касательной (фиг. 126)

$$OC = OB - BC,$$

тогда корень получится еще точнее

$$x'' = x' - \frac{f(x')}{f'(x')} \tag{113}$$

и так далее.

Способ Ньютона без исключения успешно применяется тогда, когда касательная проводится в точке, где кривая выпукла к оси x (безразлично, находится ли точка выше или ниже оси); если же проводить касательную в точках, где кривая к оси вогнута, способ не всегда приближает к корню, но может даже от него отдалить, как показывает рассмотрение фиг. 128—130, в которых точки E и F находятся вне первоначальных пределов A и D. Определение выпуклости или вогнутости кривой к оси x в данной точке совершается по знаку произведения самой функции на ее вторую производную: если

$$\left.\begin{aligned} f(x)\cdot f''(x) > 0 \quad & \text{выпукла} \\ f(x)\cdot f''(x) < 0 \quad & \text{вогнута} \end{aligned}\right\} \tag{114}$$

к оси x. Поэтому безошибочный порядок приближения к корню

должен быть такой: написать $f(x)$, $f'(x)$ и $f''(x)$; подставить $f(a)$, $f(b)$, $f''(a)$ и $f''(b)$; определить знаки $[f(a) \cdot f''(a)]$ и $[f(b) \cdot f''(b)]$ и подставить в (111) и (112) $f'(a)$ или $f'(b)$, смотря по положительному знаку произведения. В случае отрицательного знака нужно сравнивать результат с первоначальными пределами. Вообще можно пользоваться способом при всяких условиях, если наблюдать за пределами корня.

Способ reguli falsi (ложного положения) не зависит от выпуклости или вогнутости кривой и представляет собою замену пересечения кривой с осью x пересечением прямой MN, проходящей через две точки M и N, соответствующие пределам корня. Вместо истинной точки x получается точка R (фиг. 128—131). Уточнять результата здесь нельзя. Аналитическое выражение правила получится, если написать уравнение прямой, проходящей через две точки (дана более простая фиг. 132),

$$\frac{y - f(a)}{f(b) - f(a)} = \frac{x - a}{b - a}.$$

Полагая $y = 0$, имеем приближенное значение корня

$$x' = a + \frac{(b-a) \cdot f(a)}{f(a) - f(b)}. \qquad (115)$$

В нашем примере

$$a = 3, \quad b = 5;$$

$$\begin{aligned} &f(x) = x^3 - 10{,}5\,x^2 + 21x + 15{,}5; \qquad && f(a) = 11; \quad f(b) = -17; \\ &f'(x) = 3\,(x^2 - 7x + 7); && f'(a) = -15; \\ &f''(x) = 3\,(2x - 7); && f''(a) = -3; \quad f''(b) = 9; \end{aligned}$$

$$f(a) \cdot f''(a) < 0;$$
$$f(b) \cdot f''(b) < 0;$$

кривая расположена, как на фиг. 130; но так как она идет довольно круто, способ Ньютона дает все-таки приближение

$$(112) \qquad x' = 3 - \frac{11}{-15} = 3{,}73$$

лучшее, чем по способу reguli falsi

$$(115) \qquad x' = 3 + \frac{2 \cdot 11}{11 + 17} = 3{,}785.$$

Способ Ньютона показывает еще, что истинный корень меньше 3,73, так как кривая вогнута.

2. Графоаналитический способ. Максимальный (или также минимальный) прогиб там, где имеется у балки неповернутое сечение, т.-е. где $\theta = 0$ или, что все равно,

$$(Q) = 0. \qquad (84)$$

Равенство (84) есть написанное в самом сжатом виде уравнение для нахождения абсциссы максимального прогиба x_1, которое для данного случая (фиг. 76—78) имеет вид:

$$(A)+\frac{1}{3}+\frac{18}{6^2}(x_1-1)^2+1\cdot(x_1-1)-\int\limits_1^{x_1}\left[-\frac{qx^2}{2}+A(x-1)+1\right]dx=0.$$

Под интегралом стоит ордината параболы — выражение момента на среднем участке для верхней эпюры (фиг. 77) с прибавлением еще 1, так как парабола считается поднятой на 1 tnm² вверх; зато прямоугольник $ABcd$ весь считается отрицательным. Уравнение выражает, что сумма проекций площадей обеих эпюр на ось y, взятая левее проведенного сечения TU (т.-е. на искомой длине x_1), равна 0, причем фиктивная реакция (A) и отрицательные площади считаются действующими вверх, а положительная площадь параболы — вниз. Площадь AFG, которой основание $AF=x_1-1$, вследствие подобия с $ABH=18$ tnm² равна $\frac{18}{6^2}(x_1-1)^2$.

После подстановки известных из предыдущего $(A)=8^2/_3$ tnm², $q=2\frac{\text{tn}}{\text{m}}$ и $A=8$ tn уравнение приводится к

$$x_1^3-10{,}5\,x_1^2+21\,x_1+15{,}5=0,$$

как и следовало ожидать. Таким образом, при точном решении облегчения против аналитического способа не получается; но в приложениях часто достаточно считать отдельные узкие криволинейные полоски за трапеции, тогда отыскать x_1 не представляет труда. Так, подсчитаем для первого подхода (Q) в средине пролета:

$$(Q)_f=8^2/_3+\frac{1}{3}+\frac{18}{4}+3-18=-1^1/_2\,\text{tnm}^2.$$

Это показывает, что максимальный прогиб находится левее средины, так как площадь параболы преобладает. Нужно сдвинуться влево на такую длину k (фиг. 77—78), чтобы поштрихованная полоска параболы, которую можно принять за трапецию, оказалась больше соответствующей полоски нижнего треугольника на $1^1/_2$ tnm². Подстановкой найденного значения x_1 в формулу (82) получается y_{max}. Плечи площадей в этом способе также можно измерять прямо по чертежу, и только окончательное суммирование производится аналитически.

3. Способ веревочного многоугольника дает максимальный прогиб вместе со всеми прочими (фиг. 119).

X. Статическая неопределимость.

§ 35. Системы статически неопределимые. Лишние неизвестные. Система, имеющая число неизвестных более, нежели число уравнений равновесия Статики, которые можно для этой системы написать, называется статически неопределимой.

Такие системы определенно решаются только в том случае, если для нахождения лишних неизвестных можно составить соответствующее число добавочных уравнений, выражающих условия, которым подчинены деформации системы.

В случае, если уравнений деформаций меньше, чем лишних неизвестных, система допускает бесчисленное множество или, вообще, несколько решений.

Так, при нахождении сил по трем тягам, поддерживающим нагрузку P (фиг. 133), условие $\Sigma X = 0$ доказывает, что, при одинаковом угле наклона крайних тяг, силы X по ним равны между собою, и остается только одно уравнение $\Sigma Y = 0$

$$Y + 2X \operatorname{cs}\alpha - P = 0. \tag{a}$$

Но удлинения CE и CC_1 крайних и средней тяги связаны прямоугольным треугольником CEC_1, в котором EC_1, по чрезвычайной малости деформаций, заменяет дугу EC_1 из неподвижной точки подвеса A.

Так как

(9) $$CC_1 = \frac{Yl}{EF} \quad \text{и} \quad CE = \frac{X \cdot \frac{l}{\operatorname{cs}\alpha}}{EF}$$

(предполагается, что тяги одного сечения и одного материала), то связь деформаций

$$CE = CC_1 \cdot \operatorname{cs}\alpha$$

дает

$$\frac{X \cdot l}{\operatorname{cs}\alpha \cdot EF} = \frac{Yl\operatorname{cs}\alpha}{EF},$$

или

$$X = Y \cdot \operatorname{cs}^2\alpha. \tag{b}$$

Это и есть лишнее условие. Решая (a) и (b) совместно, находим

$$Y = \frac{P}{1 + 2\operatorname{cs}^3\alpha}; \quad X = \frac{P\operatorname{cs}^2\alpha}{1 + 2\operatorname{cs}^3\alpha}.$$

Равенство у тяг E и F не обязательно; в общем случае в уравнение войдут или сами величины E_1, F_1, E_2, F_2, или их отношения.

Точно так же, в случае действующих на заделанный в две детали круглый валик (фиг. 134) крутящих моментов M_1 и M_2, считая при взгляде с левого торца пару, приложенную к валу, положительной,

если она вращает по стрелке часов, и называя (пока со знаком $+$) реактивные моменты M_A и M_B, имеем уравнение Статики

$$M_A + M_1 - M_2 + M_B = 0; \qquad \text{(c)}$$

уравнение же деформаций состоит в том, что угол закручивания правого заделанного сечения B по отношению к левому A равен 0, что дает при постепенном суммировании угла по ступеням, начиная слева,

(47) (32)
$$\frac{M_A \cdot a}{G \cdot 0{,}1\, d^4} + \frac{M_A \cdot b}{G \cdot 0{,}1 \alpha^4 d^4} + \frac{(M_A + M_1)c}{G \cdot 0{,}1 \alpha^4 d^4} + \frac{(M_A + M_1)f}{G \cdot 0{,}1 \beta^4 d^4} +$$
$$+ \frac{(M_A + M_1 - M_2)k}{G \cdot 0{,}1 \beta^4 d^4} = 0 \qquad \text{(d)}$$

(здесь на каждом участке взят весь действующий постоянный во всех сечениях участка момент).

По упрощении (c) и (d) дают M_A и M_B.

Статически неопределимые системы допускают, вообще говоря, бо́льшее разнообразие в решении, нежели определимые, так как путь решения, помимо всего прочего, здесь зависит также и от выбора неизвестных, которые должны войти в уравнение деформаций. В статически определимой системе сгибающие моменты, продольные и поперечные силы не зависят от размеров сечений; в неопределимой — зависят.

При изменении одной какой-либо величины, прочие меняются все одновременно, так как здесь они связаны большим числом уравнений.

§ 36. Балки статически неопределимые. Классы статически неопределимых балок. Разрешающие уравнения. Чтобы исключить возможность выбора длинного и неудобного пути решения статически неопределимых балок, их полезно подчинить классификации. При этом нагрузка, как таковая, не имеет никакого значения для классификации. В балках характерна не нагрузка, а устройство и число их опор.

Обыкновенная неподвижная опора (фиг. 135) и подвижная (каток, фиг. 136) могут давать реакцию только перпендикулярную к своей опорной плоскости, т.-е. соответствуют одной неизвестной величине силы на балке. Шарнирная опора (фиг. 137) способна давать реакцию R любого направления, или две неизвестных X и Y; также допускает горизонтальную слагающую опора фиг. 138.

Заделка (фиг. 139), не препятствуя балке выдвигаться по горизонтальному направлению, не позволяет балке поворачиваться в опоре, т.-е. во все время работы балки поддерживает ее угол упругой линии в опоре θ_A равным 0 (совершенная заделка). Это она осуществляет помощью пары DD_1 = моменту Dd, и реакции A, которую обыкновенно переносят с прибавлением пары AA в точку A (пересечение оси балки с плоскостью стены). После этого в точке A получается два реактивных воздействия: реакция A и момент M_A, равный моменту

внешней нагрузки в точке A. Сила D обыкновенно во много раз больше силы A. Действительно, если, например, на расстоянии 1 m от стены мы прикладываем к заделанной балке силу в 1 tn, то момент внешних сил в точке A равен 1 tn m = 100 tn cm. Пусть $d = f = 100$ mm = 10 cm. Так как реакция на крайней точке A у опоры не возникнет, а произойдет в некоторой точке D, то момент, уравновешиваемый парой Dd, равен 110 tn cm, откуда $D \cdot 10 = 110$; $D = 11$ tn. Между тем, сила A только 1 tn. В точке A, по вычитании из Dd пары Af, получается и с левой стороны $Dd - Af = 100$ tn cm. Учитывая эту разницу, у балок, опасный (наибольший) момент которых получается в плоскости заделки, следует считаться с тем, что в стене момент еще немного увеличивается. Иногда это принимается во внимание особыми гражданскими и техническими нормами, требующими (как, например, это делается для железобетонных балок), чтобы расчетный пролет у таких балок считался несколько увеличенным; в иных случаях можно не считаться с этим, покрывая разницу некоторой небольшой надбавкой допускаемого напряжения.

Таким образом, заделка заменяет собою две неизвестных реакции— силу и момент.

Считаясь со свойствами опор, легко определить количество лишних неизвестных у балки. Так как продольная нагрузка на балку, производящая растяжение, сжатие или продольный изгиб, может быть рассмотрена отдельно от поперечных сил, то рассматриваемая поперечная нагрузка балок не будет давать проекций на ось балки, т.-е. уравнений Статики остается только два:

$$\Sigma Y = 0 \text{ и } \Sigma M = 0.$$

Следовательно, если число всех неизвестных у балки n, то число лишних неизвестных $n - 2$.

Решение статически неопределимой балки начинается с нахождения лишних неизвестных, после чего она становится статически определимой, т.-е. решается прежними способами. Лишние неизвестные находятся наиболее просто и наглядно на основе графоаналитического способа.

К первому классу балок отнесем все балки, имеющие одну заделку и одну опору (фиг. 140—144). Где находится это опора— внутри вылета или на конце—безразлично; место опоры не является типичным для балки. Построены отдельно эпюры, дающие одни отрицательные моменты (выпуклость балки вверх), одни положительные (выпуклость балки вниз), фиг. 141—143, без принятия во внимание опорной реакции B. Масштабы и величина построенных эпюр полностью известны. Наконец, построена (фиг. 144) последняя эпюра от неизвестной реакции B. Ни масштаб ни величина этой эпюры неизвестны; зато известно, что она всегда будет треугольник с вершиной в B. Мы представляем себе этот треугольник всегда положительным, т.-е. силу B приложенной вверх; если она получится после решения положительной—направление ее вверх; если отрицательной—вниз.

Рассматривая целиком **все площади с их знаками и мысленно сложив их,** утверждаем, что левая фиктивная реакция всей суммы (A) и левый фиктивный момент ее $(M)_A$ равны 0 (в точке A нет ни угла, ни прогиба). Если теперь взять фиктивный момент налево в точке B [налево именно потому, что там $(A)=0$ и $(M)_A=0$], то это равносильно определению прогиба в точке B, но этот прогиб равен 0, поэтому имеется уравнение

$$(M)_B=0\,, \tag{116}$$

из которого найдется B.

Второй класс статически неопределимых балок имеет две заделки (фиг. 145 — 150). Здесь наиболее удобными для нахождения неизвестными являются опорные моменты M_A и M_B. Так как от них эпюры будут строиться отдельно, то предварительно можно построить эпюры от заданных нагрузок в предположении, что в A и B простые опоры; а именно, эпюры от сил, дающих положительные моменты, — фиг. 146, отрицательные — фиг. 147, от приложенного внутри момента — фиг. 148; все эпюры полностью известны; и, наконец, отдельно построены неизвестные еще по величине эпюры искомых моментов M_A и M_B (фиг. 149 и 150), относительно которых известно только, что обе они — треугольники с основаниями, равными пролету, с высотами M_A и M_B в точках приложения опорных моментов и с вершинами в противоположной опоре. (Построение эпюры от момента, приложенного на опоре, показано для ясности отдельно на частном случае балки фиг. 151 — 152.) Неизвестные моменты M_A и M_B считаем пока положительными, истинный же знак выяснится из решения.

Мысленно сложив все эпюры, утверждаем, что сумма эпюр имеет фиктивные опорные реакции, равные 0,

$$\left.\begin{aligned}(A)&=0\,,\\(B)&=0\end{aligned}\right\} \tag{117}$$

(в заделках нет угла упругой линии), откуда и определяются оба лишних неизвестных M_A и M_B.

К третьему классу нужно отнести балку на трех опорах (фиг. 153 — 158).

Графоаналитический способ хотя и решает задачу, но является сложным, так как при балке с консолями приводит к решению пяти уравнений: двух уравнений Статики для фиктивных нагрузок $\Sigma(Y)=0$ и $\Sigma(M)=0$ и трех уравнений деформаций, выражающих, что прогибы в точках A, B и C равны 0: $(M)_A=0$, $(M)_B=0$ и $(M)_C=0$ (при балке без консолей — к трем уравнениям). Между тем, имеются способы, решающие такую задачу гораздо проще (одно уравнение)[1]. Поэтому графоаналитический способ может быть применен только в том случае, если требуется найти и деформации балки. Эпюры построены сначала от внешней нагрузки, не принимая во внимание

[1]) См. расчет многопролетной балки.

средней опоры, наконец, отдельно от неизвестной реакции опоры C, эпюра — треугольник фиг. 158; силу C удобнее считать отрицательной, так как в обыкновенном случае нагрузки сверху она действует снизу (погашает тот прогиб в точке C, который создан внешней нагрузкой), высота треугольника фиг. 158 равна $C\frac{l_1 l_2}{l_1+l_2}$, что следует из рассмотрения простой балки с опорами A и B без средней опоры, но нагруженной силою C. Как и в предыдущем случае II, неподвижными точками — скелетом построения — являются опоры A и B. Фиг. 154 построена от сил P, R и поштрихованной части сплошной нагрузки U, внутренняя часть сплошной нагрузки дает фиг. 155, остальные две получаются от внешних моментов, приложенных к балке.

Неизвестные, определяемые из уравнений: четыре фиктивных реакции по концам балки (A), $(M)_a$, (B), $(M)_b$ и опорная реакция C. Частные случаи нетрудны.

Дальнейшая классификация статически неопределимых балок не представляет интереса.

При постепенном увеличении числа опор те резкие различия, которые заметны при сравнении балок первых трех классов, начинают стушевываться; балки осложняются, но делаются все более и более похожи друг на друга, образуя то, что мы называем общим именем — многопролетная балка. Для нее имеются свои способы решения.

Некоторый интерес для общего способа решения могут еще представить балки фиг. 159 и 160, имеющие — первая 2, а вторая 3 лишних неизвестных, определяемые из уравнений:

фиг. 159: $(M)_B=0$, $(M)_C=0$ (писать моменты в сторону заделки);

фиг. 160: $(A)=0$, $(B)=0$, $(M)_C=0$.

Решение балок первых трех классов можно выразить так (см. табл. II).

ТАБЛИЦА II.

Класс	Число лишних неизвестных	Искомые	Разрешающие уравнения	Примечания
I	1	B	$(M)_B=0$	Момент писать в сторону заделки
II	2	M_A M_B	$(A)=0$ $(B)=0$	
III	1	C	$(M)_C=0$	

Указанные в табл. II способы решения—не единственные, но наиболее короткие. (Решение еще более сокращается, если предварительно находить опорные моменты по способу многопролетной балки.)

§ 37. Некоторые упрощения решения статически неопределимых балок первых двух классов. Зная решение классов балок, мы избавляем себя от специального изучения каждой балки в отдельности. Однако, к общей теории можно сделать некоторые частные дополнения, позволяющие во многих случаях еще более ускорить решение. Балку III класса отнесем в этом случае уже к многопролетным, и рассмотрим только классы I и II.

Класс I.

Лемма. Если на опоре балки I класса приложен момент M, то он создает момент заделки $-\frac{M}{2}$ (знак считается по выпуклости).

Лемма могла бы быть доказана общим приемом решения, изложенном в предыдущем параграфе. Но тот способ хорош именно для многих сил, в данном же случае несколько скорее итти иным путем.

На фиг. 161 представлена сама балка.

Заделка имеет в себе две неизвестных: опорную реакцию A и искомый момент заделки M_A. Но, чтобы не искать опорной реакции, можно оставить на месте самую опору, стену же отбросить и заменить ее искомым моментом M_A. Итак, балка представляется лежащей на двух опорах и нагруженной в точках опор двумя моментами: заданным M и искомым M_A (фиг. 162). Первый дает эпюру—отрицательный треугольник $\frac{Ml}{2}$ с высотой M в точке B (ниже оси, фиг. 163). Он создает в опоре A угол

(83) $$\theta_A = \frac{Ml}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{EJ}\,.$$

Искомый момент дает положительный треугольник $\frac{M_A \cdot l}{2}$ с высотой M_A в точке A (выше оси, фиг. 163). Он дает в A угол

(83) $$\theta_A' = \frac{M_A \cdot l}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{EJ}\,.$$

Но второй угол погашает первый; значит, углы в сумме равны 0.

$$\frac{Ml}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{EJ} + \frac{M_A l}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{EJ} = 0;$$

$$M_A = -\frac{M}{2}\,.$$

На фиг. 163 представлена окончательная эпюра моментов.

Следствие. Если нагрузка задана только на консоли за опорой (фиг. 164—165), то балка решается сразу определением момента на опоре M_B (эпюра на самой консоли определима) и отложением

$$M_A = -\frac{M_B}{2}.$$

Пусть теперь внутри пролета задана единственная сила P (фиг. 166). Аналогично убеждаемся, что, если откинуть стену и оставить обе опоры, то момент заделки должен погасить угол (фиктивную реакцию) в левой вершине треугольника моментов от силы P (фиг. 167). Представив треугольник в виде трех равных по весу точек в вершинах, имеем этот угол

$$EJ \cdot \theta_A = \frac{Pab}{6} + \frac{Pab}{6} \cdot \frac{b}{l}.$$

Угол же от момента заделки

$$EJ \cdot \theta'_A = \frac{M_A \cdot l}{2} \cdot \frac{2}{3},$$

$$\frac{Pab}{6} + \frac{Pab^2}{6l} + \frac{2M_A \cdot l}{6} = 0;$$

откуда

$$M_A = -\frac{Pb(l^2 - b^2)}{2l^2}. \tag{118}$$

Следовательно, момент заделки балки I класса, нагруженной единственной силой P, равен половине этой силы, деленной на квадрат пролета и умноженной на плечо опоры и на разность квадратов пролета и этого плеча.

Действующая вниз сила создает отрицательный момент заделки.

Если внутри пролета дано несколько сосредоточенных сил (фиг. 169), то момент M_A заделки пишется сразу

$$M_{A_{сосредот.}} = -\frac{1}{2l^2}[Pb(l^2 - b^2) - Rc(l^2 - c^2) + Uf(l^2 - f^2)]. \tag{118 a}$$

Если внутри пролета дана сплошная нагрузка (фиг. 170) меняющаяся по закону q [измерение q: (*сила*) · (*длина*)$^{-1}$], то элементарную нагрузку qdx можно сосчитать за сосредоточенную силу; она создает момент заделки

$$dM_A = -\frac{qdx \cdot x(l^2 - x^2)}{2l^2},$$

откуда весь момент

$$M_{Aq} = -\frac{1}{2l^2}\int_b^c qx(l^2 - x^2)\,dx. \tag{119}$$

Если балка с консолью и нагрузка какая-угодно, то момент заделки пишется также сразу, как алгебраическая сумма половины момента на опоре с обратным знаком и моментов, полученных от сосредоточенных сил и от сплошной нагрузки

$$M_A = -\frac{M_B}{2} + M_{A_{сосредот.}} + M_{A\,q}. \tag{120}$$

В моментах при пользовании формулой ставятся знаки, сообразуясь с выпуклостью как в (118) и (119); знаки самой формулы даны для сил, направленных вниз; для сил вверх—они обратны.

Момент, приложенный к балке (фиг. 171) так, что он создает момент заделки такого же знака, как и сила, направленная вниз, добавляет в правой части равенства (120) слагаемое $+\frac{M}{2l^2}(l^2-3b^2)$, причем в этом слагаемом величина момента понимается абсолютная (вывод по предыдущему).

Класс II.

Здесь (фиг. 172) будем вести рассуждение как в общем способе, § 36.

Фиктивные опорные реакции балки, нагруженной силою P, но не заделанной в стены (фиг. 173),

$$(A) = \frac{Pab}{6} + \frac{Pab}{6}\cdot\frac{b}{l};$$

$$(B) = \frac{Pab}{6} + \frac{Pab}{6}\cdot\frac{a}{l}.$$

Фиктивные реакции от опорных моментов (фиг. 174—175)

$$(A)' = \frac{M_A\cdot l}{3} + \frac{M_B\cdot l}{6};$$

$$(B)' = \frac{M_A\cdot l}{6} + \frac{M_B\cdot l}{3}.$$

Но

$$\begin{cases}(A)+(A)'=0,\\(B)+(B)'=0,\end{cases}$$

откуда

$$\left.\begin{aligned}M_A &= -\frac{Pab^2}{l^2},\\ M_B &= -\frac{Pa^2b}{l^2},\end{aligned}\right\} \tag{121}$$

т.-е. момент заделки балки II класса, нагруженной единственной силой P, равен этой силе, деленной на квадрат пролета и умноженной на свое плечо и на квадрат противоположного плеча.

Сила, действующая вниз, создает отрицательный момент заделки.

При нескольких сосредоточенных силах (фиг. 176) моменты заделки пишутся сразу

$$\left.\begin{aligned} M_{A\ \text{сосредот.}} &= \frac{1}{l^2}(-Paf^2 + Rgc^2 - Ukb^2), \\ M_{B\ \text{сосредот.}} &= \frac{1}{l^2}(-Pa^2f + Rg^2c - Uk^2b). \end{aligned}\right\} \quad (121\,\text{a})$$

При сплошной нагрузке, меняющейся по закону q (фиг. 177),

$$dM_A = -\frac{q\,dx}{l^2}\cdot x(l-x)^2,$$

$$dM_B = -\frac{q\,dx}{l^2}\cdot x^2(l-x);$$

$$\left.\begin{aligned} M_{Aq} &= -\frac{1}{l^2}\int_a^b qx(l-x)^2\,dx, \\ M_{Bq} &= -\frac{1}{l^2}\int_a^b qx^2(l-x)\,dx. \end{aligned}\right\} \quad (122)$$

При произвольной нагрузке

$$\left.\begin{aligned} M_A &= M_{A\ \text{сосредот.}} + M_{Aq}; \\ M_B &= M_{B\ \text{сосредот.}} + M_{Bq}. \end{aligned}\right\} \quad (123)$$

Знаки даны для сил, действующих вниз. В моменте заключается знак соответственно с выпуклостью [формулы (121) и (122)].

Если дана внутри пролета изгибающая пара M такого направления, что она производит левый момент заделки того же знака, что и действующая сверху вниз сила (фиг. 178—181), то решение приводится к системе уравнений

$$\frac{Ma^2}{6l} + \frac{M}{3l}(a^2-b^2)\frac{b}{l} + \frac{M_A\cdot l}{3} + \frac{M_B\cdot l}{6} = 0,$$

$$-\frac{Mb^2}{6l} + \frac{M}{3l}(a^2-b^2)\frac{a}{l} + \frac{M_A\cdot l}{6} + \frac{M_B\cdot l}{3} = 0,$$

из которых, после замены $\frac{a^2-b^2}{l} = a-b$ и упрощений, получится

$$\left.\begin{aligned} M_{A\ \text{пары}} &= -\frac{M}{l^2}b(2a-b); \\ M_{B\ \text{пары}} &= +\frac{M}{l^2}a(2b-a). \end{aligned}\right\} \quad (124)$$

Балки I и II классов очень хорошо решаются и по способам многопролетной балки.

§ 38. Аналитический и графический способы решения статически неопределимых балок. Чистый аналитический способ решения статически неопределимых балок в общем случае очень сложен. Действительно, прибавление каждого лишнего пролета дает по крайней мере два новых постоянных при решении дифференциальных уравнений (если же на пролете имеются сосредоточенные силы или приложены внешние изгибающие пары, то каждое такое воздействие добавляет сверх указанных еще по два новых постоянных). Балки с не очень сложной нагрузкой решаются этим способом довольно быстро; например, решение частного случая балки фиг. 182 будет протекать так (пусть $M_A = M$ и $M_B = m$):

момент в первом участке

$$M_1 = -m + Bx,$$

во втором

$$M_2 = -m + Bx - R\frac{(x-a)}{3} = -m + Bx - P\frac{(x-a)^3}{3a^2},$$

так как из подобия треугольников

$$\frac{R}{P} = \frac{(x-a)^2}{a^2}.$$

Пусть положительное направление оси y вверх, тогда

$$EJ\frac{d^2y_1}{dx^2} = -m + Bx,$$

$$EJ\frac{dy_1}{dx} = -mx + B\frac{x^2}{2} + C_1,$$

$$EJy_1 = -m\frac{x^2}{2} + B\frac{x^3}{6} + C_1 x + D_1;$$

$$EJ\frac{d^2y_2}{dx^2} = -m + Bx - P\frac{(x-a)^3}{3a^2},$$

$$EJ\frac{dy_2}{dx} = -mx + B\frac{x^2}{2} - \frac{P(x-a)^4}{12a^2} + C_2,$$

$$EJy_2 = -m\frac{x^2}{2} + B\frac{x^3}{6} - \frac{P}{60a^2}(x-a)^5 + C_2x + D_2.$$

При	$x = a$	$\frac{dy_1}{dx} = \frac{dy_2}{dx}$,	$C_1 = C_2$;
„	$x = a$	$y_1 = y_2$,	$D_1 = D_2$;
„	$x = 0$	$\frac{dy_1}{dx} = 0$,	$0 = C_1 = C_2$;
„	$x = 0$	$y_1 = 0$,	$0 = D_1 = D_2$.

Условия же $x=2a$, $\frac{dy_2}{dx}=0$ и $x=2a$, $y_2=0$ дают два уравнения

$$0=-2ma+\frac{B}{2}\cdot 4a^2-\frac{P}{a^2}\cdot\frac{a^4}{12},$$

$$0=-\frac{m}{2}\cdot 4a^2+\frac{B}{6}\cdot 8a^3-\frac{Pa^5}{60a^2},$$

из которых, исключая B,

$$m=\frac{7Pa}{120}.$$

Знак $+$ указывает, что направление момента на чертеже верно (по существу же момент отрицателен, выпуклость вверх).

Таким образом, лишние неизвестные в этом способе находятся из тех же условий, что и постоянные C и D; иногда даже они смешиваются с ними, требуя совместного решения системы. Это также представляет осложнение, и потому иногда желательно лишние неизвестные находить каким-либо иным путем, а уже только после этого переходить к дифференциальным уравнениям.

В данном примере можно, конечно, сразу найти M и m. Расположив начало при вершине нагрузки (фиг. 183), имеем прежде всего

$$\frac{q}{h}=\frac{x}{a},\quad q=h\frac{x}{a},\quad \text{но}\quad \frac{ha}{2}=P;$$

откуда, исключая h,

$$q=\frac{2Px}{a^2}=cx.$$

Теперь

$$dm=\frac{q\,dx\,(a+x)\,(a-x)^2}{l^2}=\frac{c}{l^2}x\,(a+x)\,(a-x)^2dx$$

и

$$m=\frac{c}{l^2}\int_0^a x\,(a+x)\,(a-x)^2\,dx=\frac{7Pa}{120}.$$

В решениях при помощи Графостатики статически неопределимая балка приводится подобно предыдущему к ряду определимых, и затем моменты и прогибы графически суммируются; лишние неизвестные должны быть предварительно найдены другими способами.

XI. Инфлюентные линии.

§ 39. Подвижная нагрузка. Инфлюентная линия. Применение инфлюентной линии к решению статически неопределимых балок. Каждая построенная эпюра, безразлично для какого рода нагружения, полностью соответствует действительности лишь при том непременном условии, что нагрузка неподвижна.

Но иногда нагрузка может перемещаться относительно системы. Перемещение ее может быть двоякое: она или 1) может двигаться по прямой или кривой, оставаясь все время параллельной самой себе, или 2) нагрузка вращается. Возможны случаи комбинирования обоих перемещений.

Из перечисленных случаев до настоящего времени наиболее хорошо исследовано влияние на систему нагрузки, перемещающейся по первому способу, т.-е. параллельно самой себе, и притом по прямому направлению.

Во всех случаях необходимо найти такое положение нагрузки на системе, при котором она для системы наиболее опасна.

Критерием того влияния, которое нагрузка на систему производит, являются попрежнему величины, связанные органически с внутренними упругими силами частей системы, т.-е. напряжения, силы, моменты, опорные реакции, прогибы этих частей; во всех случаях мы стремимся проследить за возможными наибольшими значениями этих величин.

Здесь будут рассмотрены только некоторые немногие примеры подвижной нагрузки.

Мы начнем с простой двухопорной балки, на которой поставлен груз, равный единице (фиг. 184). Найти, по какому закону будет меняться левая опорная реакция в зависимости от положения груза на балке. Обозначая $AC = x$, получим

$$y_A = A = \frac{l - x}{l} \tag{125}$$

— уравнение, дающее A как функцию x. Это — прямая BD, имеющая над A ординату $= 1$. Прямая AE, отложенная для удобства вниз, изображает закон изменения правой реакции. Проведя вертикаль YY, читаем на чертеже значение опорных реакций при положении груза над точкой F.

Линия, ординаты которой дают в определенном масштабе закон изменения какой-либо величины (силы, момента, напряжения, прогиба и т. п.) в одной определенной точке системы в зависимости от местоположения перемещающегося по системе груза, равного единице, называется инфлюентной линией.

BD есть инфлюентная линия опорной реакции A, ее уравнение—(125), в котором удобнее обозначить ординату $A = y_A$.

Из фиг. 184 легко получается инфлюентная линия поперечной силы для точки F (фиг. 185), годная в поштрихованных участках.

Размер ординаты инфлюентной линии силы—отвлеченное число.

Если на балке стоят грузы не 1, а P, R и U, то по инфлюентной линии поперечная сила в точке F равна (фиг. 186)

$$Q_F = Py_1 - Ry_2 + Uy_3. \tag{126}$$

Ординаты имеют значения абсолютные, силы снабжаются знаком. При расположении какого-либо груза над самой точкой F берется бо́льшая ордината.

Если на балке расположена равномерная нагрузка (фиг. 187), то поперечная сила в точке F от элемента нагрузки есть

$$dQ_F = q y dx,$$

а на всей длине нагрузки

$$Q_F = q\int_e^f y dx$$

или

$$Q_F = q. \text{ (площ. инфл. лин.)}. \tag{127}$$

Найдем изменение момента в точке F от силы 1 (фиг. 188). Правая реакция $B = 1\cdot\frac{x}{l}$, момент в точке F равен

$$y_{M_F} = Bb = \frac{bx}{l} \tag{128}$$

— уравнение прямой AC; инфлюентная линия AC годится только от A до E; другая часть ее, т.-е., когда груз 1 уйдет за точку F вправо,

$$y_{M_F} = Aa = \frac{l - x}{l}\cdot a. \tag{128 a}$$

Наибольший возможный момент в точке F получается, когда груз окажется над этой точкой; этот момент равен

$$y_{M_{max}} = EF = \frac{ab}{l}\cdot \tag{129}$$

Отсюда следствие I: при движении по балке единственного груза максимальный момент может получиться только в сечении под грузом.

Интересно попутно отметить, что эпюра моментов от груза 1, поставленного в F, будет тот же треугольник AEB. Но это—случайное совпадение только для точки F, вполне естественное, так как та и другая линии выражают в это время одинаковой ординатой $\frac{ab}{l}$ момент под грузом. Когда груз сойдет с точки F, эпюра сейчас же изменится, а инфлюентная линия останется попрежнему AEB.

Можно доказать, что если построить всевозможные эпюры для различных положений груза на балке, то вершина этих эпюр E опишет квадратную параболу, с максимумом в середине пролета.

Для этого (фиг. 189) нужно только найти какую-нибудь высоту $M = DE_1$ в зависимости от x. Но известно, что высота эпюры от единственного груза P есть $\frac{Pab}{l}$; следовательно,

$$M = DE_1 = \frac{P\left(\frac{l}{2} - x\right)\left(\frac{l}{2} + x\right)}{l};$$

$$M = \frac{P}{l}\left(\frac{l^2}{4} - x^2\right). \qquad (130)$$

Это—парабола AE_1E, у которой максимум при $x = 0$ и равен $\frac{Pl}{4}$.

Таким образом, II: при единственном грузе самое опасное его положение в середине пролета.

Положения I и II двумя различными подходами исследуют опасность балки.

Для того, чтобы убедиться, что момента, большего, чем $\frac{Pl}{4}$, не получится, нужно было повторить эпюру бесчисленное количество раз (фиг. 189); инфлюентная же линия одна уже гарантирует, что опасный момент только под грузом.

Назовем параболу AE_1EE_2B, и вообще кривую, на которой лежат все абсолютные максимумы эпюр, объемлющей эпюр.

Можно, конечно, говорить и об объемлющей инфлюентных линий, если построить их не одну только для точки F (фиг. 188), а для всех точек пролета. В данной балке ясно видно, что при грузе $= 1$ эти кривые — одна и та же парабола AE_1EE_2B, хотя сами линии вообще не совпадают.

Таким образом, инфлюентная линия решает вопросы методом, обратным эпюре. Эпюра представляет выраженный графически закон изменения величин воздействий в балке для всех сечений балки, но при единственном положении нагрузки; инфлюентная линия дает его только для единственного сечения, но зато при всех положениях груза $= 1$.

Выбор способа исследования зависит от условий задания, но для подвижной нагрузки инфлюентная линия имеет преобладающее значение.

Практически невозможно построить инфлюентные линии для всех интересующих точек; но можно назначить достаточное число точек (от 4 до 10), тогда по имеющимся линиям можно уже судить обо всем явлении.

Инфлюентные линии (называемые также линиями влияния) были предложены Винклером (Winkler) и Вейраухом (Weyrauch) несколько ранее 1875 г.

От единичной силы к произвольным нужно переходить в моменте, подобно предыдущему, для поперечной силы. При расчете какого-либо определенного сечения нужно располагать грузы P, R и U так, чтобы сумма $Py_1 + Ry_2 + Uy_3$ получила наибольшее значение.

Нахождение опасного положения системы нескольких движущихся по балке в постоянном расстоянии один от другого грузов может быть произведено рассмотрением нескольких парабол, анало-

гичных фиг. 189. В Строительной Механике доказывается, что при нахождении абсолютного наибольшего момента при непосредственном действии движущейся системы на балку достаточно исследовать только моменты под грузами, так как наибольший будет среди них. (*П. А. Велихов, Теория Инженерных Сооружений*).

Поэтому, например, при системе из двух неравных грузов (фиг. 190), максимальный момент может получиться только под большим грузом R. Если расстояние этого груза от левой опоры равно x и постоянное расстояние между грузами равно a, то момент под большим грузом

$$M = Ax = \frac{x}{l}\,[R(l-x) + r(l-a-x)].$$

Из $\frac{dM}{dx} = 0$ получается

$$x = \frac{l}{2} - \frac{ar}{2(R+r)}, \qquad (131)$$

т.-е нужно больший груз от средины пролета отодвинуть к смежной опоре на величину $\frac{ar}{2(R+r)}$ (так, чтобы средина пролета оказалась внутри грузов), что для равных грузов дает $\frac{a}{4}$, т.-е. четверть базы грузов.

Инфлюентные линии очень хорошо разрешают статически неопределимые балки при сосредоточенной и сплошной равномерной нагрузке.

Так, инфлюентная линия момента заделки M_A балки фиг. 191 имеет уравнение

(118) $$y_{M_A} = \frac{x(l^2 - x^2)}{2l^2}, \qquad (132)$$

а балки фиг. 192

(121) $$y_{M_A} = \frac{x(l-x)^2}{l^2}. \qquad (133)$$

Если линии построены в масштабе, то умножением нагрузок на соответствующие ординаты (и на масштаб) M_A получается для любого заданного положения нагрузок

$$M_A = Py_1 + Ry_2 + Uy_3 + \ldots\ldots \quad \text{(знак в обозначении силы).}$$

Здесь удобно проследить влияние на опорные моменты перемещения нагрузок. Способ особенно хорош, если решается много балок одного типа и пролета; все их решает одна и та же линия. При сплошной нагрузке инфлюентные линии работают не ординатами, а своею площадью по формуле

(127) $$M_A = q \cdot (\textit{площ. инфл. лин.})$$

(соответственные площади указаны на фиг. 191 и 192).

Можно иметь заранее составленными таблицы ординат линий в достаточно близких расстояниях Δx и отдельных узких площадей их с шириною Δx, тогда решение еще более ускоряется.

Вторая балка имеет еще вторую инфлюентную линию для момента M_B

(121) $$y_{M_B}=\frac{x^2(l-x)}{l^2}$$ (133)

(при прежнем начале) — точно такую же, но симметричную с первой относительно их общей средней ординаты.

Можно также разработать инфлюентные линии для приложенных сгибающих пар.

Легко построить и другие виды инфлюентных линий. Например, для исследования тангенциальных напряжений необходимы инфлюентные линии поперечной силы, которая для указанных балок I и II класса имеет вид, представленный на фиг. 193 и 194. Построение их производится по предыдущему, предварительным нахождением уравнений инфлюэнтных линий опорных реакций A и B. По нахождении моментов заделки для груза 1, балки становятся определимыми, и опорные реакции их получаются обыкновенным способом из уравнений Статики, причем будут выражены через независимое переменное x (фиг. 193 и 194). На фигурах показаны инфлюентные линии поперечной силы для сечения F.

Для нахождения наиневыгодного расположения грузов нужно опять образовывать суммы

$$Py_1+Ry_2+Uy_3+\dots$$

и остановиться на том расположении грузов, при котором указанные суммы получаются наибольшими.

Точно так же строятся инфлюентные линии момента для любого заданного сечения F

$$y_{M_F}=f(x).$$

Интересно отметить, что у статически неопределимой балки инфлюентные линии моментов и сил всегда кривые, а у определимой — прямые.

Нетрудно получить и инфлюентные линии прогиба в любой заданной точке

$$y_{y_F}=f_1(x).$$

Рассмотрим теперь пример вращающегося груза (фиг. 195), который, оставаясь все время равным 1, может относительно двух стержней 1-го и 2-го, на которые он действует (угол между стержнями 90°), иметь различные положения в зависимости от угла φ, отсчитываемого от стержня 1-го против стрелки часов. Начальное положение груза (по стержню 1-му) дает сжимающую силу 1 в стержне 1-м

и 0 — в стержне 2-м. Нетрудно найти закон изменения усилий по стержням 1-му (фиг. 196) и 2-му (фиг. 197), который интереснее всего построить в полярной диаграмме. Он в этом случае представляется для каждого стержня двумя окружностями — пунктирной для отрицательных усилий и сплошной для положительных (в Декартовых координатах получились бы косинусоида и синусоида). После проведения радиуса под требуемым углом каждое усилие наглядно прочитывается на чертеже как отрезок этого радиуса. Указанный пример чрезвычайно прост и может иметь интерес только как одновременное ясное показание всех усилий в системе при всех положениях нагрузки. В машиностроении, однако, очень часто приходится иметь дело с подобными поворачивающимися грузами, притом изменяющимися не только по положению, но также еще по величине и направлению. Решение в этих случаях производится также почти исключительно графическими способами, излагаемыми в Прикладной Механике. Там оперируют обыкновенно с полными заданными грузами, особенно если рассматривается действие хотя и переменной, но одной только силы; но, конечно, в случае надобности возможно перейти и к грузу = 1 и затем пользоваться равенством $Py_1 + Ry_2 + Uy_3 + \ldots$ инфлюентных линий.

XII. Брус переменного сечения.

§ 40. Нахождение напряжений. Чрезвычайно важную для машиностроения задачу представляет разбор напряжений и деформаций бруса переменного сечения. В виду большой трудности этой задачи мы разобьем ее на две отдельные части. К первой отнесем все те случаи, которые подчиняются нашим основным и единообразным методам расчетов; сюда относятся в первую очередь: a) прямой ступенчатый брус, т.-е. такой, у которого поперечные сечения постоянны на некоторых определенных участках длины; b) прямой непрерывно изменяющийся брус. Ко второй части будут относиться случаи уже индивидуального порядка, которые трудно или совершенно невозможно подвести под основную теорию; брусья, внезапно ослабленные отверстиями или углублениями (шпоночная дорожка вала, дыры для болтов и заклепок), некоторые исключения из теории ступенчатого и непрерывного бруса, отдельные опытные исследования. Здесь в I части курса будет рассматриваться только первая часть задачи (вторая будет изложена в части II).

Изложению случаев a и b предпошлем общие замечания.

В ступенчатом брусе тоже не может быть внезапного изменения площади сечения: площадь пусть меняется хотя и на очень малой длине по сравнению с общей длиною бруса, но все-таки непрерывно (на этой длине), т.-е. наклон кривой, изменяющей боковой контур бруса (в месте перехода), должен меняться непрерывно.

Другое краткое замечание касается силы, как таковой. Сама первоначальная сущность силы необыкновенно сложна. Только за-

коны Ньютона, в особенности закон III (actioni contrariam semper et aequalem esse reactionem . . .), указывают нам на природную особенность *действия* (так как может быть сила или пара сил) устремляться туда, где его может уравновесить *противодействие* — другая сила или пара, равная и противоположная. [Поэтому, например, каким бы способом ни передавалась через материал, т.-е. хотя бы и чистой силой и при помощи момента, приложенная к рамке (фиг. 198) сила P, все-таки воздействие ее потечет к опорным заделкам A и B, переходя от частицы к частице. Если перерезать одну из балок рамки, по перерезанной балке сила не потечет вовсе (за исключением собственного веса), а все противодействие силе P должна будет создать только одна заделка балки, оставшейся целой.] Из законов Ньютона также следует, что каждое действие имеет свойство объемности (отвлеченных сил, приложенных к единственной точке, нет).

Поэтому в ступенчатом брусе фиг. 199, будет ли он только растягиваться силами P или также изгибаться силами, например, $\frac{R}{2}$, R и $\frac{R}{2}$, при переходе от сечения *1* к сечению *2* поток внутренних сил (*действий*, т.-е. сил и пар) расширяется, стремясь захватить все точки (элементарные объемы), способные сопротивляться, а их теперь стало больше. Если назвать площади сечений *1* и *2* f и F и модули сопротивления этих площадей w и W, то в сечении *1* напряжение от силы P больше против сечения *2* в $\frac{F}{f}$ раз, а от внешнего момента $\frac{Rb}{2}$ максимальное напряжение больше в $\frac{W}{w}$ раз. В самых местах перехода на длине *1 — 2* найти напряжения уравнениями Сопротивления Материалов невозможно, так как хотя указанное выше условие относительно переходной кривой выполнено, но есть все-таки точка мгновенного изменения контура сечения, при выводе же уравнений напряжений была сделана об этом оговорка.

Итак, при непрерывном изменении контура сечения, все выведенные уравнения напряжений справедливы, поскольку сохраняются свойства бруса.

Этого нельзя сказать об уравнениях деформаций. Все они были пока получены для постоянного сечения по всей длине бруса.

§ 41. Нахождение деформаций балок: ступенчатых и непрерывно переменных. Рассмотрим нахождение деформаций балки a) ступенчатой и b) непрерывно меняющейся. Все три известные способы решения здесь возможны.

Аналитический способ. Основное уравнение $EJ\frac{d^2y}{dx^2} = \pm M$ выведено для бесконечно малого элемента dx. Поэтому оно правильно и на конечной длине, если только считать J переменным, т.-е. функцией x.

a) При ступенчатой балке это создает увеличенное число участков, так как теперь они считаются не только по виду уравнения

момента, но и по ступеням. Например, у балки фиг. 200 при $J = Const$ три участка: BD, DC и CA; при J переменном — четыре: BD, DE, EC и CA. Но в каждом участке $J = Const$, поэтому прежний способ остается в силе.

b) В непрерывно меняющейся балке число участков зависит только от вида уравнения момента, т.-е. остается прежним, но J участвует в интегрированиях.

Найти прогиб y_B правого конца равносторонней трапецевидной балки AB фиг. 201. Пусть положительная ось y-ков вниз;

$$EJ_x \cdot \frac{d^2y}{dx^2} = + P(x - a)$$

(начало расположено в точке O). Если момент инерции правого крайнего сечения J, то, так как ширина сечения $b = Const$, момент инерции текущего сечения K

$$J_x = J\frac{x^3}{a^3};$$

$$E\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{P(x-a)a^3}{Jx^3} = n\cdot\frac{x-a}{x^3};$$

$$E\frac{dy}{dx} = n\left(-\frac{1}{x} + \frac{a}{2x^2}\right) + C;$$

$$Ey = n\left(-\ln x - \frac{a}{2x}\right) + Cx + D;$$

$$x = 2a \qquad \frac{dy}{dx} = 0; \qquad C = \frac{3n}{8a};$$

$$x = 2a \qquad y = 0; \qquad D = n\ln 2a - \frac{n}{2};$$

$$x = a \qquad y_B = \frac{n}{E}(\ln 2 - 0{,}625) = \frac{Pa^3}{14{,}7\,EJ}.$$

Графоаналитический способ. Так как при выводе этого способа мы исходили из того же дифференциального уравнения упругой линии, то все полученные соотношения распространяются и на конечные длины, с тою лишь разницею, что J подходит под знак интеграла. Основное равенство напишется теперь так:

(80) $$\theta_C = \theta_A - \frac{1}{E}\int\limits_{AC}\frac{M}{J}\,dx. \qquad (134)$$

Равенство истолковывается тем же способом и дает совершенно аналогичные выводы; но масштабом между деформациями и фиктив-

ной нагрузкой является теперь не EJ, а только E; ординаты же фиктивной нагрузки пропорциональны теперь не сгибающим моментам, а отношениям $\frac{M}{J}$ в каждой точке оси балки. Размер фиктивной нагрузки теперь tnm^{-2}, т.-е. вообще (*сила*) $\cdot$ (*длина*)$^{-2}$, а фиктивного момента tnm^{-1}, т.-е. (*сила*)$\cdot$(*длина*)$^{-1}$.

$\frac{M}{J}$ называется приведенным моментом.

Следствие. Для пользования эпюрой моментов, как и раньше, нужно произвести:

a) при ступенчатой балке — приведение к общему наибольшему или к общему наименьшему знаменателю уравнения (134), т.-е. при $J_1 > J_2 > J_3$ все ординаты умножить

на ступени с J_1 — на 1,

„ „ „ J_2 — на $\frac{J_1}{J_2}$.

„ „ „ J_3 — на $\frac{J_1}{J_3}$

(или разделить

на ступени с J_1 — на $\frac{J_1}{J_3}$,

„ „ „ J_2 — на $\frac{J_2}{J_3}$,

„ „ „ J_3 — на 1);

вообще — увеличить ординаты тем больше, чем меньше соответствующее J; в окончательных ответах деформации выражаются через J_1 (или через J_3);

b) при непрерывно меняющемся сечении также трансформировать все ординаты, сведя все к единственному моменту инерции.

Так, например, при нахождении координаты максимального прогиба балки фиг. 203 — 204, ординаты правой части эпюры умножаются на 2, затем отыскивается такое x, чтобы стоящий на x треугольник был равен (B).

Предыдущий пример (фиг. 201) решается построением по эпюре моментов приведенного момента BCD (фиг. 202) и взятием фиктивного момента в точке B. Каждую ординату нужно разделить на $\frac{J_x}{J}$, т.-е умножить на $\frac{a^3}{x^3}$.

Первоначальная ордината

$$M = P(x - a).$$

Расчетная ордината

$$m = M\frac{a^3}{x^3} = \frac{Pa^3(x-a)}{x^3} = b \cdot \frac{x-a}{x^3};$$

$$y_B = \frac{(M)_B}{EJ} = \frac{\int\limits_a^{2a} m(x-a)\,dx}{EJ} = \frac{b\int\limits_a^{2a} \frac{x-a}{x^3}\,dx}{EJ} = \frac{b}{EJ}(\ln 2 - 0{,}625) =$$

$$= \frac{Pa^3}{14{,}7\,EJ}.$$

Графический способ также может быть распространен на брус переменного сечения.

Прежде всего возможно перестроить графически эпюру моментов и поступать по предыдущему.

Или же вместо изменения ординат фиктивной нагрузки можно менять полюсное расстояние. Если, например, нужно ординаты моментов какого-нибудь участка получить умноженными на 2, то это можно сделать, уменьшив вдвое полюсное расстояние в первом многоугольнике на то время, пока чертятся соответствующие этому участку стороны веревочного многоугольника. Можно, конечно, вместо этого сделать то же самое во втором многоугольнике.

XIII. Собственный вес бруса.

§ 42. Влияние на напряжения и деформации собственного веса. Наши основные материалы—сталь, железо, стальное литье, даже чугун и дерево — настолько совершенны, что их собственный вес в машинах и сооружениях, вообще говоря, невелик по сравнению с теми нагрузками, которые они выдерживают. Хотя отношение этих нагрузок — полезной и собственного веса — разнообразно, но, например, для балки § 21 (двутавровая № 30) оно равно

$$\frac{R+P}{G} = \frac{16\,000 + 6\,000}{49{,}93 \cdot 8} = \infty \frac{22\,000}{50 \cdot 8} = 55.$$

Поэтому при нахождении размеров этих балок вначале не принимают во внимание собственного веса, и лишь для поверки находят отдельно добавочное напряжение от него. Железобетонные балки, наоборот, отличаются большим весом, поэтому при их расчете необходимо уже вначале добавлять по приблизительной оценке к полезной эту нагрузку, и затем по получении размеров проверять принятый в расчете вес. Таким образом, собственный вес построек, вообще говоря, не может быть игнорируем. В особенности же это замечание относится к естественным и искусственным камням. Он, в частности, имеет большое значение для прочности длинных вертикальных штанг, а также подъемных шахтных канатов, которые почти всегда исполняются ступенчатыми, с утолщением вверх так, чтобы напряжение разрыва в верхнем сечении и некоторых промежуточных было оди-

наково. Расчетное уравнение весомой штанги постоянного сечения F на разрыв при ее длине l, удельном весе γ и полезном грузе P

$$H_\partial = \frac{P + Fl\gamma}{F} = \frac{P}{F} + l\gamma. \quad (135)$$

Напряжение на расстоянии x от нижнего конца $\frac{P}{F} + \gamma x$, т.-е. напряжение меняется по закону наклонной прямой; напряжение от собственного веса в произвольном сечении $H_\gamma = \gamma x$; удлинение штанги от собственного веса (фиг. 205)

(9) (12)
$$\lambda_\gamma = \int_0^l e\,dx = \int_0^l \frac{H_\gamma}{E}\,dx = \frac{\gamma}{E}\int_0^l x\,dx = \frac{\gamma l^2}{2E};$$

так как $Fl\gamma = G$ (собственному весу), то

$$\lambda_\gamma = \frac{\gamma}{E}\cdot\frac{l^2}{2}\cdot\frac{F}{F} = \frac{Gl}{2EF}, \quad (136)$$

т.-е. собственный вес дает удлинение вдвое меньшее, чем такой же груз, приложенный на конце.

Нетрудно распространить эти выводы и на ступенчатый растягиваемый брус.

XIV. Кручение прямого бруса некруглого сечения.

§ 43. В кручении прямого бруса некруглого сечения наиболее хорошо исследовано сечение прямоугольное. Оно допускает нетрудный математический вывод уравнения напряжений, но нужно заметить, что, вследствие несохранения здесь сечений плоскими, получаемое уравнение несколько (хотя немного) отличается от истинного. Точное решение приводится в курсах Теории Упругости (оно было сделано Сен-Венаном). Результаты обоих решений совпадают при отношении сторон сечения $\frac{h}{b} = \infty 1{,}3$; при квадратном сечении первое решение преуменьшает напряжение на 6,2%, при отношении $\frac{h}{b} = 1{,}5$ преувеличивает на 3,8%, при $\frac{h}{b} = 10$ преувеличивает на 29%.

Мы приведем вывод общей (приближенной) формулы, затем результаты точного решения и % ошибки, т.-е. указание, сколько %% нужно прибавить к приближенному напряжению, чтобы получить точное.

Мы подвергаем брус, сечение которого изображено на фиг. 206, действию только двух равнопротивоположных крутящих пар $M_к$.

Напряжения находятся в плоскости чертежа. Направление их обратно внешней паре $M_к$. Во всех внутренних точках контура A, B напряжения имеют две составляющие T_x и T_y. В точках периметра C напряжение T_x, перпендикулярное к стороне, равно 0, ибо по закону парности T-напряжений, существование напряжения T_x требовало бы существования в точке C равного напряжения T_x (перпендикулярного чертежу) на наружной боковой стороне, но на ней никаких сил не приложено.

Отсюда далее следует, что в угловой точке D могли бы существовать только напряжения T, направленные по замкнутому контуру $CDEF$ и совпадающие со сторонами периметра. Но, как известно, такое направление для T-напряжений невозможно, ибо они могут быть направлены только или от ребра пересечения напряженных плоскостей или к этому ребру (§ 5). Следовательно, напряжения в угловых точках могут быть равны только 0.

Это вполне подтверждается опытом: угловые, начерченные на брусе квадраты не деформируются. Все прочие обращаются после деформации в ромбы, скошенные тем более, чем ближе они находятся к средине стороны сечения. Поэтому максимальные напряжения сдвига находятся в средних точках каждой стороны. Опыт показывает, что эти сдвиги растут от угловых точек до средин сторон вначале быстро, затем медленнее по некоторой кривой, которую без большой ошибки можно принять за параболу FGE для длинной стороны и EHD для короткой (принятие параболической кривой заменяет в данном случае закон плоских сечений при изгибе).

Подобно круглому цилиндрическому брусу абсолютная величина сдвигов пропорциональна расстоянию сдвигающихся элементов сечения от оси бруса (на длинной стороне сечения ромбы скошены пропорционально больше, чем на короткой), так что если назвать напряжения в срединах сторон T_h и T_b, то существует соотношение

$$\frac{T_h}{T_b}=\frac{h}{b}\,. \tag{137}$$

Выясненные свойства периметрических напряжений (параболы FGE и EHD) и пропорциональное падение напряжений каждого направления до нуля при движении параллельно стороне от периферии к оси (эпюры KCM и LNP) позволяют построить полное напряжение в любой точке контура R (фиг. 207) по величине и направлению; также найти напряжение на диагонали OE (можно доказать, что полные напряжения на диагонали все между собою параллельны).

На этом же основании можно произвести суммирование момента всех элементарных сил для того, чтобы приравнять его к внешнему моменту $M_к$.

Действительно, если провести элементарную полоску ST (фиг. 208), то напряжения, параллельные ST, будут изменяться по закону TUS

параболы с пропорционально уменьшенными ординатами против наружной параболы DWX. Среднее напряжение на стороне XD можно определить аналогично T-напряжениям прямоугольника при изгибе из соотношения

(88) $$T_{max} = T_h = \frac{3}{2} T_{сред};$$

$$T_{сред} = \frac{2}{3} T_h.$$

Среднее напряжение по направлению ST

$$T_x = T_{сред} \frac{x}{\frac{b}{2}} = \frac{4 \cdot T_h \cdot x}{3b};$$

вся элементарная сила по ST есть $T_x h dx$, элементарный момент относительно O

$$dM_h = T_x \cdot hx\,dx;$$

весь момент внутренних сил, параллельных h,

$$M_h = 2\int_0^{\frac{b}{2}} T_x \cdot hx\,dx = \frac{8T_h \cdot h}{3b}\int_0^{\frac{b}{2}} x^2 dx = \frac{T_h \cdot hb^2}{9}.$$

Аналогично, момент сил, параллельных b,

$$M_b = \frac{T_b \cdot bh^2}{9}.$$

Сумма их равна внешнему моменту $M_к$

$$M_к = M_h + M_b = \frac{bh}{9}(T_h \cdot b + T_b \cdot h),$$

откуда, после решения совместно с (137),

$$T_h = \frac{M_к}{\frac{2}{9} \cdot b^2 h}; \quad (138)$$

$$T_b = \frac{M_к}{\frac{2}{9} \cdot bh^2}. \quad (139)$$

В случае действия на брус одного крутящего момента расчет должен вестись по максимальному напряжению (138).

Изменение напряжений по периметру в действительности отличается несколько от параболического закона. Точные значения координат эпюры напряжения по периметру Сен-Венан дает таблицами,

в которых „h“ дает напряжение в нескольких равноостоящих точках длинной стороны, а „b“ — короткой стороны прямоугольника сечения.

В таблицах дано отношение напряжения в рассматриваемой точке к напряжению в средине соответствующей стороны в зависимости от $\frac{h}{b}$ (табл. III). Начало координат x и y в центре прямоугольника сечения.

ТАБЛИЦА III.

$\frac{y}{h}$; $\frac{x}{b}$ \ $\frac{h}{b}$	Значения для h			Значения для b	
	1	2	4	2	4
0	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
0,1	0,975	0,984	0,997	0,973	0,973
0,2	0,896	0,932	0,984	0,889	0,889
0,3	0,751	0,820	0.937	0,737	0,737
0,4	0,506	0,592	0,770	0,489	0,489
0,5	0	0	0	0	0

Точная формула для T_h:

$$T_h = \frac{M_\kappa}{\mu b^2 h}. \tag{140}$$

Для угла закручивания служит формула

$$\theta = \frac{M_\kappa \cdot l}{G a b^3 h}. \tag{141}$$

Коэффициенты μ и α зависят от $\frac{h}{b}$ и приведены в табл. IV.

γ в табл. IV представляет отношение

$$\gamma = \frac{T_b}{T_h}, \tag{142}$$

указывающее, между прочим, что действительное напряжение короткой стороны меньше, чем дает (137).

Таким образом, принятый параболический закон напряжений очень немного отступает от более сложного истинного распределения, преуменьшает напряжение только для сечения квадратного и ему близких $\left(\frac{h}{b} = 1{,}1 - 1{,}2\right)$, во всех же остальных случаях дает напря-

жение даже несколько большее, и потому, за исключением весьма немногих единичных случаев, всегда предпочитается в расчетах.

ТАБЛИЦА IV.

$\frac{h}{b}$	1	1,5	1,75	2	2,5	3	4	10	∞
μ	0,208	0,231	0,239	0,246	0,258	0,267	0,282	0,312	0,333
α	0,141	0,196	0,214	0,229	0,249	0,263	0,281	0,312	0,333
γ	1	0,572	0,469	—	0,307	—	0,186	0,074	0
К результату (138) прибавлять	+6,2%	—3,8%	—6,7%	—9,8%	—13,8%	—16,7%	—21,3%	—29%	—33,3%

Нижняя строка табл. IV дает % ошибки.

Сен-Венаном решена задача о кручении некоторых других контуров, в том числе для эллиптического. Пусть a и b полуоси эллипса. T_{max} получается на концах малой оси и равно

$$T_{max} = T_a = \frac{M_к}{\frac{\pi a b^2}{2}} \cdot \tag{143}$$

Другое напряжение

$$T_b = \frac{M_к}{\frac{\pi a^2 b}{2}} \cdot \tag{144}$$

Угол закручивания

$$\theta = \frac{M_к \cdot l(a^2 + b^2)}{G\pi a^3 b^3} = \frac{4\pi^2 M_к \cdot l J_{0э}}{GF^4} ; \tag{145}$$

$$F = \pi a b;$$

(18) (34)

$$J_{0э} = \frac{\pi a b}{4}(a^2 + b^2) = \frac{F}{4}(a^2 + b^2). \tag{146}$$

Формулы кручения других практически ценных контуров уже не являются основными. Большинство из них могли быть получены только опытным путем (см. часть II).

XV. Обобщение выводов для поперечного сечения.

§ 44. Общая формула напряжения в произвольной точке поперечного сечения прямого бруса. Этим заканчиваются выводы уравнений напряжений в поперечном сечении прямого бруса. Можно резюмировать их следующим образом. Если даны:

1) размеры бруса,

2) система опор, нагрузки,

3) координата поперечного сечения (координата z, отсчитываемая по оси бруса, соответственно самому общему случаю, § 13; в дальнейшем она была заменена x),

4) размеры сечения

и 5) координаты x и y точки сечения,

то полное напряжение в этой точке подсчитывается полностью, если брус круглый цилиндр (сплошной или пустотелый) при любой нагрузке; полностью при любом поперечном сечении, если в нагрузке не будет задано крутящих пар.

Пусть задана точка C поперечного сечения $EFGK$ (фиг. 209). Нормальное напряжение ее

от сгибающих сил в вертикальной плоскости	FK	$\frac{M_x \cdot y}{J_x}$;
„ „ „ „ горизонтальной „	EG	$\frac{M_y \cdot x}{J_y}$;
„ растягивающей (или сжимающей) осевой силы		$\frac{P}{F}$;
и нормальное напряжение от крутящего момента	$H_{M_к}$	величина расчету не поддается.

Общее нормальное напряжение точки (алгебраическое сложение, ибо точка одна)

$$H = \frac{P}{F} + \frac{M_x \cdot y}{J_x} + \frac{M_y \cdot x}{J_y} + H_{M_к}. \tag{147}$$

Тангенциальное напряжение этой точки от изгиба в плоскости FK

$$\frac{Q_x \cdot S_x}{J_x \cdot b_x};$$

то же в плоскости EG

$$\frac{Q_y \cdot S_y}{J_y \cdot b_y};$$

суммарное напряжение от обоих воздействий

$$T_{изгиба} = \sqrt{\left(\frac{Q_x \cdot S_x}{J_x \cdot b_x}\right)^2 + \left(\frac{Q_y \cdot S_y}{J_y \cdot b_y}\right)^2}, \tag{148}$$

так как эти напряжения перпендикулярны.

На чертеже указаны площади статических моментов и ширины горизонтов.

Пусть тангенциальное напряжение точки C от кручения $T_к$ — эта величина известна только для некоторых сечений.

$T_{изгиба}$ и $T_к$ составляют между собою некоторый острый (или тупой) угол; сложиться они должны геометрически (оба напряжения находятся в плоскости чертежа); суммарное тангенциальное напряжение

$$T = T_{изгиба} \mathbin{+\!\!\rightarrow} T_к \tag{149}$$

($\mathbin{+\!\!\rightarrow}$ знак геометрического сложения).

Наконец, величины H и T [формулы (147) и (149)] всегда составляют прямой угол, поэтому полное суммарное напряжение в общем виде равно

$$C = \sqrt{H^2 + T^2}, \tag{150}$$

причем сюда нужно было бы сделать все подстановки из (147), (148) и (149).

При круглом цилиндре $H_{M_к} = 0$ и $T_к = \frac{M_к \cdot \varrho}{J_0}$, так что формула упрощается.

А. Общая часть

(продолжение).

XVI. Обобщение напряжений.

§ 45. Распространение понятия о напряжении. Общие свойства напряжений. Главные напряжения H_1 и H_2. Максимальное T. Назовем (150) общим уравнением напряжений поперечного сечения.

Хотя оно и дает полное напряжение в любой точке, но лишь в одной плоскости, и потому вопроса о прочности не решает. Может быть в прочих плоскостях, наклоненных к оси бруса под произвольными углами, напряжение больше найденного. Необходимо, следовательно, знать все напряжения, возникающие в данной точке. Иначе говоря, должны быть найдены общие свойства напряжения, как величины, подобно силе, направленной и протекающей по всем возможным плоскостям, которые можно через данную точку провести. Знание отдельных напряжений H [формула (147)] и T [формула (149)] для поперечной плоскости — есть первый шаг к этому.

Итак, нужно вообразить в брусе точку, через которую мысленно проводится плоскость, могущая вращаться вокруг этой точки, и искать напряжения в рассматриваемой точке для всевозможных наклонов плоскости.

Пусть плоскость прежде вращается так, что во всех положениях остается перпендикулярной к плоскости нагрузки на брус (т.-е. плоскости чертежа). Необходимо около точки иметь плоскость поперечного сечения, в которой напряжения H и T уже известны, и произвольно наклоненную к ней, т.-е. нужно вообразить около точки элементарную трехгранную призму с размерами основания dx, dy и ds и с высотою, перпендикулярной плоскости чертежа, dh (фиг. 210, 211); $dx = ds \cdot \operatorname{cs}\alpha$; $dy = ds \cdot \operatorname{sn}\alpha$; площади граней призмы указаны на фиг. 212. В гранях действуют нормальные и тангенциальные напряжения H, T, N и K. По свойству парности T работает в двух плоскостях; N и K—искомые косые напряжения; они найдутся из условий равновесия сил, приложенных к граням. Важно отметить, что в нашем распоряжении имеется только два уравнения проекций и нет уравнения моментов, так как конечной целью является переход к пределу, так,

чтобы исчезли все бесконечно малые размеры, и наклонная плоскость прошла через самую точку A.

Для нахождения N удобнее всего взять условие равновесия проекций сил на ось, параллельную N, что дает по сокращении на $ds \cdot dh$

$$-H\,\mathrm{sn}^2\alpha + T\,\mathrm{sn}\,\alpha\,\mathrm{cs}\,\alpha + T\,\mathrm{sn}\,\alpha\,\mathrm{cs}\,\alpha + N = 0;$$

$$N = H\,\mathrm{sn}^2\alpha - T\,\mathrm{sn}\,2\alpha. \qquad (151)$$

Это уравнение выражает все напряжения N в зависимости от наклона плоскости. Экстремум N получится при помощи уравнения

$$\frac{dN}{d\alpha} = 2H\,\mathrm{sn}\,\alpha\,\mathrm{cs}\,\alpha - T\,\mathrm{cs}\,2\alpha \cdot 2 = 0,$$

откуда

$$\mathrm{tg}\,2\alpha = \frac{2T}{H}. \qquad (152)$$

Полученное уравнение дает для 2α два угла, отличающиеся на 180°; для α, следовательно, два угла, отличающиеся на 90°. Для правильного нахождения углов нужно знать знак дроби $\frac{2T}{H}$, т.-е. отдельно знаки T и H.

Условимся, как и прежде, считать знак H положительным, если это—напряжение растяжения, а знак T положительным, если оба напряжения T действуют от угла призмы. Подобно тому как соотношения между тригонометрическими функциями получаются из рассмотрения их прежде в первом квадранте, где все они положительны, так и на черт. 212 изображен пока случай положительных H и T (остальные случаи будут рассмотрены особо).

Следовательно, $\mathrm{tg}\,2\alpha$ положителен.

Это значит, что при указанном направлении напряжений функции $\mathrm{sn}\,2\alpha$ и $\mathrm{cs}\,2\alpha$ могут иметь лишь одинаковый знак. Из второй производной

$$(151) \qquad \frac{d^2N}{d\alpha^2} = H\,\mathrm{cs}\,2\alpha \cdot 2 + 2T\,\mathrm{sn}\,2\alpha \cdot 2$$

видно, что максимум N получается, если обе функции имеют знак —, а минимум, если обе имеют знак +.

После замены

$$\mathrm{cs}\,2\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2 2\alpha}} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{4T^2}{H^2}}} = \frac{H}{\sqrt{H^2+4T^2}} = \frac{H}{B},$$

$$\mathrm{sn}\,2\alpha = \frac{\mathrm{tg}\,2\alpha}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2 2\alpha}} = \frac{2T}{H\sqrt{1+\frac{4T^2}{H^2}}} = \frac{2T}{\sqrt{H^2+4T^2}} = \frac{2T}{B},$$

где

$$B=\sqrt{H^2+4T^2}; \tag{153}$$

$$\operatorname{sn}^2\alpha=\frac{1-\operatorname{cs}2\alpha}{2}.$$

Подстановка этих выражений в (151) дает

$$(151)\qquad N=\frac{H}{2}-\frac{H\operatorname{cs}2\alpha}{2}-T\operatorname{sn}2\alpha,$$

если взять $\operatorname{cs}2\alpha$ и $\operatorname{sn}2\alpha$ с отрицательным знаком, максимум нормального напряжения

$$N_{max}=N_1=\frac{H}{2}+\frac{H^2}{2B}+\frac{2T^2}{B}=\frac{H}{2}+\frac{B^2}{2B}=\frac{H}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{H^2+4T^2}, \tag{154}$$

и при $\operatorname{cs}2\alpha$ и $\operatorname{sn}2\alpha$ положительных — минимум

$$N_{min}=N_2=\frac{H}{2}-\frac{H^2}{2B}-\frac{2T^2}{B}=\frac{H}{2}-\frac{B^2}{2B}=\frac{H}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{H^2+4T^2}. \tag{155}$$

Соответственно знакам $\operatorname{cs}2\alpha$ и $\operatorname{sn}2\alpha$ найдутся и самые углы α для N_{max} и N_{min}.

Точно так же, беря сумму проекций на ось, параллельную K, получим второе уравнение

$$-H\operatorname{sn}\alpha\operatorname{cs}\alpha-T\operatorname{sn}^2\alpha+T\operatorname{cs}^2\alpha-K=0,$$

дающее

$$K=-\frac{H}{2}\operatorname{sn}2\alpha+T\operatorname{cs}2\alpha, \tag{156}$$

$$\frac{dK}{d\alpha}=-\frac{H}{2}\operatorname{cs}2\alpha\cdot 2-T\operatorname{sn}2\alpha\cdot 2=0;$$

$$\operatorname{tg}2\alpha_1=-\frac{H}{2T}; \tag{157}$$

$$\operatorname{cs}2\alpha_1=\frac{1}{\sqrt{1+\frac{H^2}{4T^2}}}=\frac{2T}{B};$$

$$\operatorname{sn}2\alpha_1=\frac{-H}{2T\sqrt{1+\frac{H^2}{4T^2}}}=-\frac{H}{B};$$

$\operatorname{cs}2\alpha_1$ и $\operatorname{sn}2\alpha_1$ теперь должны иметь разные знаки; подставляя оба возможные значения, получаем (+ перед радикалом соответствует max).

$$T_{\substack{max\\min}}=\pm\frac{1}{2}\sqrt{H^2+4T^2}. \tag{158}$$

Экстремальные значения T равны по абсолютной величине.

Если предположить теперь другое направление напряжений, например, на фиг. 212 H сделать напряжением сжатия, то одновременно изменится и знак проекции, так как вектор будет обращен вверх или направо.

Придавая H окончательный знак в уравнении проекций на ось N в зависимости от обоих условий

$$[-(\textit{сжатие})]\cdot[+(\textit{направление по оси } N)]\cdot H,$$

получим без изменения те же два уравнения проекций. Итак, они являются совершенно общими, а следовательно, общи и уравнения (151) — (158).

В символах H и T в этих формулах скрыт их собственный знак, который должен быть проявлен при подсчетах в зависимости от H сжатия или растяжения и направления T — от угла или к углу.

В уравнениях проекций собственный вес призмы не мог участвовать, как имеющий три бесконечно малые множителя (по сравнению с двумя у всех прочих сил).

$N_1 = N_{max}$ и $N_2 = N_{min}$ называются главными напряжениями, а плоскости их действия — главными плоскостями. В предыдущем [формула (152)] было доказано, что главные плоскости всегда взаимно перпендикулярны.

Далее, так как

(152) (157) $$\operatorname{tg} 2\alpha \cdot \operatorname{tg} 2\alpha_1 = -1,$$

то углы 2α и $2\alpha_1$ отличаются на 90°; а значит, углы α и α_1 на 45°. Следовательно, плоскости максимального T делят углы между главными плоскостями пополам. Наконец, если сделать подстановку $\operatorname{cs} 2\alpha = \frac{H}{B}$ и $\operatorname{sn} 2\alpha = \frac{2T}{B}$ в (156), то получится

$$T_{1,2} = 0, \tag{159}$$

т.-е. тангенциальные напряжения в главных плоскостях равны 0.

В произведенном доказательстве отсутствовало нормальное напряжение m (показано пунктиром на фиг. 212) вследствие того, что брусья в направлении одного из своих малых измерений нормальными силами нагружаются чрезвычайно редко; поэтому в огромном большинстве случаев достаточно пользоваться только выведенными формулами.

Однако, если бы рассматривать общий случай нагрузки и добавить на призме также и напряжение m, самый способ доказательства и все положения относительно наклона плоскостей, а также максимумов и нулевых значений величин H и T остались бы в силе. Но, конечно, самые уравнения получаются в общем случае несколько сложнее, а именно:

$$N = H \operatorname{sn}^2\alpha + m \operatorname{cs}^2\alpha - T \operatorname{sn} 2\alpha; \tag{160}$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2T}{H - m}; \tag{161}$$

$$B = \sqrt{(H - m)^2 + 4T^2}; \tag{162}$$

$$N_1 = \frac{H + m}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{(H - m)^2 + 4T^2}; \tag{163}$$

$$N_2 = \frac{H + m}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{(H - m)^2 + 4T^2}; \tag{164}$$

$$K = \frac{m - H}{2} \operatorname{sn} 2\alpha + T \operatorname{cs} 2\alpha; \tag{165}$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha_1 = \frac{m - H}{2T}; \tag{166}$$

$$T_{\substack{max \\ min}} = \pm \frac{1}{2} \sqrt{(H - m)^2 + 4T^2}; \tag{167}$$

$$T_{1,2} = 0. \tag{159}$$

§ 46. Эллипс напряжений. Директрисса. Эллипсоид напряжений. Напряженные состояния: пространственное, плоское, линейное. Полученные выводы позволяют следить за изменениями напряжений при непрерывном вращении плоскости, проходящей через рассматриваемую точку, а также дают их максимальные значения, с указанием наклона соответствующих плоскостей.

Желательно, однако, для такой сложной величины, как напряжение, иметь еще его геометрическую модель, которая несколько иллюстрировала бы и объединяла предыдущие уравнения (159)—(167).

Пусть на фиг. 213 по осям координат xAy отложены главные напряжения H_1 и H_2; а yA есть площадка действия напряжения H_1. Проведем некоторую площадку BE, наклоненную к главной площадке yA под углом α. Тогда между напряжениями в BE и yA должно существовать соотношение (160), в котором соответственно месту напряжений на призме (угол α между плоскостями) m играет роль H_1, H — роль H_2 и T — роль $T_{1,2}$. Следовательно, так как $T_{1,2} = 0$,

(160) $$N = H_1 \operatorname{cs}^2 \alpha + H_2 \operatorname{sn}^2 \alpha, \tag{168}$$

и также T в плоскости BE

(165) $$T = (H_1 - H_2) \operatorname{sn} \alpha \operatorname{cs} \alpha. \tag{169}$$

Эти уравнения, попутно, интересны тем, что дают выражение всякого случайного напряжения N и T через главные H_1 и H_2.

Из фиг. 213 координаты конца вектора суммарного напряжения

C (точки на концах векторов C, N и T обозначены, как величины самих векторов)

$$x = N\,\mathrm{cs}\,\alpha + T\,\mathrm{sn}\,\alpha$$

и

$$y = N\,\mathrm{sn}\,\alpha - T\,\mathrm{cs}\,\alpha.$$

После подстановки N и T

$$x = H_1\,\mathrm{cs}^3\alpha + H_2\,\mathrm{sn}^2\alpha\,\mathrm{cs}\,\alpha + (H_1 - H_2)\,\mathrm{sn}^2\alpha\,\mathrm{cs}\,\alpha = H_1\,\mathrm{cs}\,\alpha\,, \tag{170}$$

$$y = H_1\,\mathrm{cs}^2\alpha\,\mathrm{sn}\,\alpha + H_2\,\mathrm{sn}^3\alpha - (H_1 - H_2)\,\mathrm{sn}\,\alpha\,\mathrm{cs}^2\alpha = H_2\,\mathrm{sn}\,\alpha\,; \tag{171}$$

исключая из (170) и (171) угол α, имеем уравнение эллипса

$$\frac{x^2}{H_1{}^2} + \frac{y^2}{H_2{}^2} = 1. \tag{172}$$

Следовательно, концы векторов полного напряжения $C = \sqrt{N^2 + T^2}$ при всех поворотах плоскости их действия вокруг напряженной точки описывают эллипс, полуосями которого являются главные напряжения. Этот эллипс называется эллипсом напряжений.

Теперь становятся наглядными экстремальные значения H_1 и H_2 главных напряжений. Они—полуоси эллипса напряжений.

Любой радиус-вектор эллипса есть полное напряжение в какой-нибудь площадке по величине и направлению.

Найдем: 1) по заданной площадке действия полное напряжение по величине и направлению и его составляющие N и T, и 2) по заданной величине полного напряжения $\sqrt{N^2 + T^2}$ площадку его действия.

1) Пусть (фиг. 214) заданная площадка есть AB. Проведем касательную к эллипсу, параллельную AB; она коснется эллипса в точке D, а DL есть диаметр, сопряженный BE.

Докажем, что перпендикуляр AF, опущенный на касательную к эллипсу напряжений, параллельную площадке действия BE, равен по величине (только по величине) полному напряжению C площадки.

Площадь параллелограмма, построенного на сопряженных диаметрах эллипса, равна площади прямоугольника, построенного на его осях (2-я теорема Аполлония), поэтому

$$AE \cdot AF = H_1 \cdot H_2. \tag{a}$$

Координаты точки E

$$x = AE \cdot \mathrm{sn}\,\alpha$$

и

$$y = AE \cdot \mathrm{cs}\,\alpha$$

удовлетворяют уравнению эллипса напряжений (172)

$$\frac{AE^2 \cdot \mathrm{sn}^2\alpha}{H_1{}^2} + \frac{AE^2 \cdot \mathrm{cs}^2\alpha}{H_2{}^2} = 1,$$

откуда

$$AE = \frac{H_1 \cdot H_2}{\sqrt{H_1^2 \operatorname{cs}^2\alpha + H_2^2 \operatorname{sn}^2\alpha}}.$$

Значит

(a) $$AF = \sqrt{H_1^2 \operatorname{cs}^2\alpha + H_2^2 \operatorname{sn}^2\alpha}.$$

Но подкоренное количество равно $N^2 + T^2$; в самом деле:

(168) (169) $$N^2 + T^2 = H_1^2 \operatorname{cs}^4\alpha + 2H_1H_2 \operatorname{sn}^2\alpha \operatorname{cs}^2\alpha + H_2^2 \operatorname{sn}^4\alpha +$$
$$+ H_2^2 \operatorname{sn}^2\alpha \operatorname{cs}^2\alpha - 2H_1H_2 \operatorname{sn}^2\alpha \operatorname{cs}^2\alpha + H_1^2 \operatorname{sn}^2\alpha \operatorname{cs}^2\alpha = H_1^2 \operatorname{cs}^2\alpha + H_2^2 \operatorname{sn}^2\alpha;$$
$$AF = \sqrt{N^2 + T^2} = C.$$

Отсюда вытекает способ построения полного напряжения AC и его составляющих по заданой площадке BE (фиг. 215).

2) Обратная задача более трудна. По заданному вектору AC (фиг. 215) нет возможности на эллипсе напряжений узнать площадку действия. В этом случае нужно строить при одном центре с эллипсом напряжений так называемую директриссу напряжений. Директрисса напряжений проще всего получается помощью замечательной аналогии между уравнениями моментов инерции (§ 9)

$$J_u = J_x \operatorname{cs}^2\alpha + J_y \operatorname{sn}^2\alpha - J_{xy} \operatorname{sn} 2\alpha,$$
$$J_{uv} = \frac{1}{2}(J_x - J_y) \operatorname{sn} 2\alpha + J_{xy} \operatorname{cs} 2\alpha$$

и уравнениями напряжений (160) и (165), в которых

J_x соответствует m,
J_y „ H,
J_{xy} „ T.

Следовательно, так же

J_1 и J_2 соответствуют H_1 и H_2;

поэтому аналогия к эллипсу инерции получится в том случае, если в знаменателе взять первые степени H_1 и H_2 (площадь F всюду входит в масштаб). Уравнение

$$\frac{x^2}{H_1} + \frac{y^2}{H_2} = \pm 1 \tag{173}$$

и есть уравнение директриссы напряжений. При H_1 и H_2 одного знака она представляет собою также эллипс, но неподобный эллипсу напряжений (так как полуоси теперь не H_1 и H_2, а $\sqrt{H_1}$ и $\sqrt{H_2}$) (фиг. 216); при H_1 и H_2 разных знаков уравнение (173) дает две гиперболы (фиг. 217)

$$\left.\begin{aligned}\frac{x^2}{H_1}-\frac{y^2}{H_2}&=1;\\ \frac{x^2}{H_1}-\frac{y^2}{H_2}&=-1.\end{aligned}\right\}\qquad(174)$$

Директриссы начерчены в масштабе большем, чем самый эллипс. Помня, что директрисса аналогична эллипсу инерции и что r_1, r_2 аналогичны $\sqrt{H_1}$, $\sqrt{H_2}$ (директриссный эллипс и эллипс инерции сдвинуты на 90°, но в эллипсе инерции и отложение величин происходит на перпендикулярах), имеем, что r_x аналогично $\sqrt{N}$, где $\sqrt{N}$ изображается перпендикуляром AM на касательную к директриссе.

$AM=\sqrt{N}$ (N—нормальная составляющая полного напряжения).

Но так как в эллипсе инерции произведение касательной на r_x в масштабе площади F дает центробежный момент, значит здесь (фиг. 216)

$$MP\cdot\sqrt{N}=T,$$

ибо T соответствует J_{xy}.

Теперь можно найти тангенс угла наклона касательной к радиусу-вектору директриссы.

$$\operatorname{tg} MPA=\frac{\sqrt{N}}{MP}=\frac{\sqrt{N}\cdot\sqrt{N}}{T}=\frac{N}{T}.\qquad(175)$$

Следовательно, касательная к директриссе дает с ее радиусом-вектором точно такой же угол, какой направление тангенциального напряжения MP составляет с направлением полного напряжения AP.

Значит, для построения площадки действия суммарного напряжения AC нужно продолжить AC до пересечения с директриссой и провести в точке пересечения P касательную к директриссе; это и есть направление площадки действия BE ($BE \parallel MP$). Составляющие напряжения C будут CN и AN (фиг. 216).

Так же необходимо поступать и при директриссах-гиперболах (фиг. 217), которые своими ветвями отделяют знаки напряжений.

Нагрузка, равнодействующие которой находятся в одной плоскости, называется плоской нагрузкой.

Итак, при плоской нагрузке все напряжения любой точки представляют собой в масштабе радиусы-векторы эллипса напряжений. Этот эллипс сам по себе, или совместно с директриссными кривыми, и есть геометрическая интерпретация напряжения в случае плоского напряженного состояния точки.

Если представить себе пространственное напряженное состояние, т.-е. нагрузка—со всех сторон, то по предыдущему (§ 13) будем иметь в виде другого компонента (кроме крутящих пар) плоскую нагрузку в плоскости, перпендикулярной к прежде рассмотренной. Ось бруса теперь обозначена через x. Пусть третье направление есть z. Тогда вторая плоская нагрузка будет создавать эллипсы напряжений вида

$$\frac{x^2}{H_1^2}+\frac{z^2}{H_3^2}=1.\qquad(172\,\text{a})$$

Так как плоскости этих эллипсов взаимно перпендикулярны, то без отдельного доказательства уясняется, что при пространственной нагрузке для точки существует и третий эллипс

$$\frac{y^2}{H_2^2}+\frac{z^2}{H_3^2}=1, \qquad (172\,b)$$

а концы всех векторов полных напряжений точки, устремленных по всем направлениям пространства, лежат на поверхности эллипсоида напряжений

$$\frac{x^2}{H_1^2}+\frac{y^2}{H_2^2}+\frac{z^2}{H_3^2}=1. \qquad (176)$$

Трехосный эллипсоид выражает совершенно общее пространственное напряженное состояние. Если по двум взаимно перпендикулярным плоскостям получаются одинаковые напряжения, то такой случай выражается эллипсоидом вращения. Такое состояние испытывает, например, каждая точка параллелепипеда, если вообразить, что весь он находится в среде некоторого постоянного давления p и, сверх того, еще сжат по оси двумя посторонними равными силами R (фиг. 218). Ось вращения эллипсоида напряжений каждой его точки параллельна оси параллелепипеда. Если напряженное состояние по всем трем направлениям одинаково, оно для каждой точки представляется сферой напряжений (тот же параллелепипед фиг. 218 без добавочных сил R). Если действие сил параллельно плоскости, то в направлении, перпендикулярном к этой плоскости, сил нет, и потому поверхность эллипсоида для каждой точки обращается в площадь единственного эллипса; плоскость его параллельна плоскости действия сил [плоское напряженное состояние; параллелепипед, растягиваемый в двух направлениях (фиг. 219)]. Возможно напряженное состояние, выражаемое площадью круга (тот же параллелепипед фиг. 219 при условии, что силы пропорциональны площадям граней, $H_1=H_2$). Случай обращения эллипса напряжений в отрезок прямой линии представляет простое центральное растяжение или сжатие бруса, (фиг. 220) (линейное напряженное состояние, действующие силы параллельны прямой линии). Легко вывести этот случай, подобно эллипсу, если пользоваться не общими формулами косых напряжений (159)—(169), а частными (151)—(159), тогда случайные напряжения выражаются через главные по формулам (так как $H_2=0$):

$$(168) \qquad X=H\,\mathrm{cs}^2\alpha, \qquad (177)$$

$$(169) \qquad T=H\,\mathrm{sn}\,\alpha\,\mathrm{cs}\,\alpha; \qquad (178)$$

это дает при подстановке в прежнее уравнение

$$y=X\,\mathrm{sn}\,\alpha-T\,\mathrm{cs}\,\alpha=0.$$

Если на тело не действует никаких сил, все эллипсы обращаются в точки.

XVII. Обобщение деформаций.

§ 47. Обобщение представления напряженного состояния. Сдвиг. Пространственная деформация. Коэффициент Пуассона. Предыдущий параграф дал пространственное представление напряжений. Деформация хотя и приводится по своему выражению к длине или к отвлеченному числу, но она также в своей основе объемна. Она всегда представляет собою распространенную на известный конечный объем сумму разнообразных деформаций элементарных объемов. Эти элементарные деформации произошли от протекания по объемам силы. Выражением объемных деформаций внутри тела служат два явления: 1) сдвиг, о котором было дано понятие вначале (деформация чистого перекашивания элементов, без изменения их объема) и 2) объемное растяжение и сжатие элементов, т.-е. деформация с изменением объема. Здесь также в силе только две различные природы явлений: имеется два напряжения H и T, модули E и G, относительная линейная деформация e и относительный сдвиг φ и т. д. Суммирование двух указанных видов элементарных деформаций в различных их сочетаниях дает видимые нами наружные деформации. Вследствие того, что сдвиг (производимый напряжениями T) не изменяет объема, выведенные ранее соотношения (10), (11) и (13) исчерпывают это явление. Деформация же с изменением объема (производимая напряжениями H) при рассмотрении ее в пространстве (не по единичному линейному направлению) оказывается более сложной. Три отдельные измерения пространства оказывают здесь влияние друг на друга: деформация, идущая по направлению одного из них, меняет величину двух других линейных размеров.

Основным физическим числом, выражающим указанное явление для отдельных строительных материалов, служит так называемый коэффициент Пуассона (Poisson).

Именно, растяжение по одному направлению сопровождается уменьшением размеров в поперечных направлениях, укорочение—увеличением. Если по основному направлению относительное удлинение есть e, то в поперечных направлениях получается относительное сжатие, равное σe, где σ для всех материалов правильная дробь, меньшая 0,5. Пуассон определял σ математическим путем и получил $\sigma = 0{,}25$; опыты дают σ несколько различающимся для отдельных строительных материалов (см. часть II).

§ 48. Примеры пространственных деформаций. Вот несколько случаев пространственной деформации растяжения или сжатия. Мы рассматриваем здесь тела конечных объемов, но совершенно так же ведут себя и элементарные объемы внутри тела.

Найти изменение объема бруса постоянного сечения F и длины l при простом (линейном) растяжении.

Первоначальный объем Fl. Каждая единица длины по направлению l теперь $1+e$. То же—по поперечным направлениям (сокра-

щение) $1-\sigma e$. Новая длина бруса $l(1+e)$. Новая площадь поперечного сечения $F(1-\sigma e)^2$. Отношение объемов нового к старому

$$\frac{V_{нов}}{V_{стар}}=\frac{Fl(1+e)(1-\sigma e)^2}{Fl}=1+e-2\sigma e \tag{179}$$

(в порядке вычисления величины, содержащие множители, начиная с e^2, отброшены).

Изменение объема параллелепипеда (фиг. 219) при плоском (двухстороннем) растяжении (измерение, перпендикулярное плоскости чертежа, есть c; напряжение от сил в направлении x есть H_x, в направлении y есть H_y). Единица длины в направлении x превратится в

$$1+e_x-\sigma e_y=1+\frac{H_x}{E}-\frac{\sigma H_y}{E}=1+\frac{1}{E}(H_x-\sigma H_y).$$

То же в направлении y будет

$$1+e_y-\sigma e_x.$$

То же в направлении c будет

$$1-\sigma e_x-\sigma e_y.$$

Новый объем

$$abc(1+e_x-\sigma e_y)(1+e_y-\sigma e_x)(1-\sigma e_x-\sigma e_y).$$

Отношение объемов

$$\frac{V_{нов}}{V_{стар}}=1+2(1-\sigma)(e_x+e_y). \tag{180}$$

При растяжении по трем направлениям каждая единица длины по направлению x превращается в

$$1+e_x-\sigma(e_y+e_z)$$

и, соответственно, по другим направлениям

$$1+e_y-\sigma(e_x+e_z),$$
$$1+e_z-\sigma(e_x+e_y).$$

Отношение объемов есть произведение написанных величин

$$\frac{V_{нов}}{V_{стар}}=1+(1-2\sigma)(e_x+e_y+e_z). \tag{181}$$

На тех же основаниях можно вывести изменения объемов при сжатии или при различных комбинациях растяжения и сжатия по двум или трем направлениям.

§ 49. Зависимость между коэффициентами упругости E и G. При помощи коэффициента Пуассона можно получить зависимость между модулями упругости E и G, что также обосновывает происходящие внутри тела элементарные деформации. Так как соотношение между E и G, конечно, не изменится от того, какие именно объемы, подверженные деформации, рассматривать, то выделим внутри произвольного деформируемого тела куб $ABCD$ (фиг. 221), размер ребра которого 1. Пусть на него действуют только нормальные напряжения H по граням AB и CD; тогда по диагональным плоскостям AO и BO будут работать тангенциальные напряжения, равные

(178) $$T = H \operatorname{sn} 45^\circ \operatorname{cs} 45^\circ = \frac{H}{2}.$$

Под действием напряжений H квадрат $AOBE$ превращается в ромб $AOBE$ (фиг. 222), относительный сдвиг φ которого из соотношения $G\varphi = T$ равен

$$\varphi = \frac{T}{G} = \frac{H}{2G}.$$

В направлении действия H имеем

$$e = \frac{H}{E},$$

откуда связь E и G есть

$$\frac{E}{G} = \frac{2\varphi}{e}. \qquad (182)$$

Но нужно выразить ее через σ.

$$\operatorname{tg} AOL = \operatorname{tg}\left(45^\circ - \frac{\varphi}{2}\right) = \frac{AL}{OL} = \frac{\frac{1}{2}(1-\sigma e)}{\frac{1}{2}(1+e)} = \frac{1-\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}}{1+\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}} = \frac{1-\frac{\varphi}{2}}{1+\frac{\varphi}{2}};$$

$$\frac{1-\sigma e}{1+e} = \frac{2-\varphi}{2+\varphi}.$$

Отсюда, выкидывая слагаемые, содержащие произведение $e\varphi$,

$$\varphi = e(1+\sigma); \qquad (183)$$

(182) (183) $$E = 2(1+\sigma)\cdot G. \qquad (184)$$

Если считать $\sigma = 0{,}25$, то $G = 0{,}4\,E$, если $\sigma = \frac{1}{3}$, то $G = \frac{3}{8}E$ [см. формулу (104)].

§ 50. Формула Сен-Венана. Коэффициент σ есть центральная величина, объединяющая все пространственные деформации, подобно тому как уравнения косых напряжений или эллипс (эллипсоид) напряжений выражает зависимость между пространственными напряжениями. Отсюда является возможность: напряженное состояние, выражаемое всей плоскостью векторов напряжений H и T по всем направлениям, заменить только одним напряжением H_c, эквивалентным всем им, взятым вместе. Это не значит, что H_c существует на самом деле в теле, как предыдущие действительные напряжения. Напряжения H_c нет, но это — удобная величина, которой присваивается лишь направление максимального H_1; тогда, если бы приложить H_c в плоскости главного напряжения по направлению H_1, получилась бы в линейном напряженном состоянии H_c деформация, равная действительно происходящей в направлении H_1 под действием всего эллипса напряжений.

Напряжение H_c предложил Сен-Венан.

Выведем H_c. Вообразим в теле некоторую точку A, направление главного напряжения которой есть AH_1. Если бы действовало только одно это напряжение, то относительное удлинение элемента объема по направлению AH_1 было бы $\frac{H_1}{E}$. Но по перпендикулярному направлению действует другое главное напряжение H_2, которое сократит предыдущую величину на $\frac{\sigma H_2}{E}$. Окончательное относительное удлинение

$$e = \frac{H_1}{E} - \frac{\sigma H_2}{E}. \tag{185}$$

Если условное напряжение, которое эквивалентно этой деформации при линейном напряженном состоянии, назовем H_c, то будет

$$H_c = Ee = H_1 - \sigma H_2. \tag{186}$$

Подставив H_1 и H_2 из (163) и (164), получим

(163) (164) (162) $$H_c = \frac{H+m}{2} + \frac{B}{2} - \frac{\sigma(H+m)}{2} + \frac{\sigma B}{2};$$

$$H_c = \frac{1-\sigma}{2}(H+m) + \frac{1+\sigma}{2}\sqrt{(H-m)^2+4T^2} \tag{187}$$

(перед радикалом всегда может быть только +). Это и есть формула Сен-Венана. После подстановки $\sigma = \frac{1}{4}$ [1]) она примет вид

$$H_c = \frac{3}{8}(H+m) + \frac{5}{8}\sqrt{(H-m)^2+4T^2}, \tag{188}$$

[1]) Формула Сен-Венана в ее употребительном виде не совсем точна, поскольку величина σ для различных материалов неодинакова.

или также (дроби весьма близки)

$$H_c = 0{,}35\,(H + m) + 0{,}65\,\sqrt{(H - m)^2 + 4T^2}. \qquad (188\,\text{a})$$

Так как очень часто m не встречается, то, кроме этой общей формулы, желательно иметь сокращенную ($m = 0$)

$$H_c = \frac{3}{8} H + \frac{5}{8} \sqrt{H^2 + 4T^2}; \qquad (189)$$

$$H_c = 0{,}35\,H + 0{,}65\,\sqrt{H^2 + 4T^2}. \qquad (189\,\text{a})$$

XVIII. Прочность.

§ 51. Три теории прочности. Изложенная теория дает способы расчета на прочность в общем случае сил.

В основу ставится некоторое принятое допускаемое напряжение H^∂ или T_∂. Но к суждению о том, что считать расчетным или опасным напряжением, можно, в зависимости от изложенного, иметь различный подход. Действительно, можно вести расчет, исходя из

1) наибольшего главного напряжения

$$H_1 = \frac{H + m}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(H - m)^2 + 4T^2}, \qquad (163)$$

или ($m = 0$)

$$H_1 = \frac{H}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{H^2 + 4T^2}, \qquad (154)$$

2) наибольшей деформации, что соответствует

$$H_c = \frac{3}{8}(H + m) + \frac{5}{8} \sqrt{(H - m)^2 + 4T^2}, \qquad (188)$$

или также

$$H_c = \frac{3}{8} H + \frac{5}{8} \sqrt{H^2 + 4T^2}, \qquad (189)$$

3) или из наибольшего тангенциального напряжения

$$T_{max} = \frac{1}{2} \sqrt{(H - m)^2 + 4T^2}, \qquad (167)$$

или также

$$T_{max} = \frac{1}{2} \sqrt{H^2 + 4T^2}, \qquad (158)$$

так что вообще нужно решить, который из этих трех указанных факторов опаснее.

Соответственно трем высказанным замечаниям существуют три различные теории прочности.

Каковы бы ни были действующие силы, два бруса считаются равнопрочными:

по 1-й теории — если их наибольшие нормальные напряжения одинаковы;

по 2-й теории — если их наибольшие относительные линейные деформации одинаковы;

по 3-й теории — если их наибольшие тангенциальные напряжения одинаковы.

1-я теория [Галилей, Ламе (Lamé), Клапейрон (Clapeyron)]. Опытами она не достаточно подтверждается: интенсивность напряженного состояния не может служить мерой прочности, ибо есть случаи, когда при двух разных условиях нагружения и при одинаковой по величине напряженности тело в одном случае разрушается, а в другом нет. Кубик, сжатый по трем взаимно перпендикулярным направлениям, выдерживает напряжения во много раз большие, нежели такой же кубик при простом сжатии.

2-ю теорию создал Сен-Венан. Она дает связь нагрузки или напряжения с деформацией, почему значительно лучше 1-ой подтверждается опытом.

3-я теория [Мор (Mohr), Карман (Kármán)]. Многие случаи разрушений указывают на расслоения и сдвиги в тех плоскостях, в которых действовало максимальное тангенциальное напряжение.

Сравним результаты расчета по всем трем теориям для нагружений, указанных на фиг. 223, 224 и 225 (табл. V). Опыт показывает, что наиболее опасный случай c, наименее—b. Расчет происходит по формулам (163), (188) и (167), $H = H_1$, $m = H_2$, $T = T_{1,2} = 0$.

ТАБЛИЦА V.

	1-я теория.	2-я теория.	3-я теория.
a	H_1	H_1	$\frac{H_1}{2}$
b	$\frac{1}{2}(H_1+H_2)+\frac{1}{2}(H_1-H_2)=H_1$	$\frac{3}{8}(H_1+H_2)+\frac{5}{8}(H_1-H_2)=H_1-\frac{H_2}{4}$	$\frac{H_1-H_2}{2}$
c	$\frac{1}{2}(H_1-H_2)+\frac{1}{2}(H_1+H_2)=H_1$	$\frac{3}{8}(H_1-H_2)+\frac{5}{8}(H_1+H_2)=H_1+\frac{H_2}{4}$	$\frac{H_1+H_2}{2}$

Знак напряжений проявлен, сами символы H_1 и H_2 — абсолютные величины.

1-я теория не отражает никак разницы нагружений. Две другие характеру деформации отвечают; расчетные напряжения получаются согласные между собой: меньшие—в случае b, наибольшие—в случае c.

Третья теория наиболее хорошо согласуется с опытом. Начало разрушений происходит именно в тех плоскостях, где при кручении брус дает излом с винтовой линией на поверхности под углом 45° (плоскости T_{max}); крешеры (сжимаемые короткие призмы; to crush — раздавливать) разрушаются, выкрашиваясь из средины, плоскости разрушения наклонены под 45° к основаниям (фиг. 226); модуль G гораздо меньше E,—и многие другие явления говорят за то, что тангенциальное напряжение опаснее нормального, а следовательно, по нему и нужно вести расчет.

Б. Брус

(продолжение).

XIX. Сложное сопротивление бруса.

§ 52. Сложение напряжений одноименных и разноименных. Выбор и применение той или иной из существующих трех теорий прочности сопутствуют, строго говоря, каждому без исключения расчету на прочность. Но особенно выпукло теории прочности проявляют себя при расчетах так называемого сложного сопротивления. Расчитать на сложное сопротивление, это значит—при знании в опасной точке отдельных компонентов полного напряжения, найти наиопасное расчетное напряжение. Поэтому суммарное напряжение, представляющее геометрическую сумму всех компонентов, не всегда есть напряжение сложное, под которым понимается именно наиопасное из всех. Суммарное напряжение и сложное представляют одну и ту же величину при сложении одноименных напряжений—одних нормальных или одних тангенциальных. Сюда относятся, например, случаи двух одновременных растяжений (сжатий), растяжения и изгиба (для расчета по одним нормальным напряжениям) двух изгибов во взаимно перпендикулярных или произвольных плоскостях. Случаи сложения одних тангенциальных напряжений не представляют интереса, хотя и встречаются нередко (T—кручения и T—поперечного изгиба). Эти сложения, как нетрудно видеть, подчиняются только двум основным правилам: 1) нормальные напряжения складываются алгебраически, 2) тангенциальные—геометрически. Отсюда непосредственно из предыдущего получаются следующие уравнения сложных одноименных напряжений:

несколько растяжений (сжатий)

$$H = \pm\frac{P}{F} \pm \frac{P_1}{F_1} \pm \frac{P_2}{F_2} \pm \ldots; \tag{190}$$

растяжение (сжатие), изгиб

$$H = \pm\frac{P}{F} \pm \frac{M}{W}; \tag{191}$$

два изгиба

$$H = \pm \frac{M}{W} \pm \frac{M_1}{W_1} \qquad (192)$$

(уравнения легко развиваются на большее число слагаемых). Всегда вопрос решается по максимальной абсолютной величине напряжения каждого знака. Для нахождения геометрических размеров делается $H = H_\partial$. Сложение возможно только если оно относится к одной площадке действия и к одной и той же точке. Результаты сложений в этом случае не зависят от выбора теории прочности.

При сложении разноименных напряжений (H с T) выбор теории прочности необходим, так как от этого зависит выбор формулы сложного напряжения. Во всех возможных—случаях сначала в точке складываются одноименные напряжения, т.-е. все они приводятся только к двум факторам H и T, а затем сложное напряжение получается по одной из указанных выше трех формул (лучше оказывать предпочтение 3-й теории перед обеими, и 2-й—перед 1-й). Результаты по 2-й и 3-й теориям разнятся очень мало.

§ 53. Замечание о сложном напряжении в балках. Предыдущее общее рассмотрение напряжений касалось произвольного тела. В балках, конечно, нет никакой разницы против общей теории, но следует сделать одно принципиальное замечание по поводу нахождения размеров балки.

Именно, размеры балки мы находим из уравнения

$$H_\partial = \frac{M_{max}}{W}, \qquad (67)$$

т.-е не по формулам косых напряжений. Действительно, на наружных, наиболее удаленных от нейтральной оси точках поперечного сечения имеется H_{max}; в этих точках $T = 0$. Все три формулы косых напряжений дадут один и тот же результат: H_{max}, H_{max} и $\frac{H_{max}}{2} = T_{max}$.

Итак, расчет для наружных волокон балок по уравнению (67) всесторонне правилен. При взятии точек сечения ближе к нейтральной оси H уменьшается, но T увеличивается; можно думать, что где-то внутри сечения может быть максимум расчетного напряжения (больший, чем H на наружной точке). У прямоугольных, круглых, трапецевидных балок и вообще таких, у которых сечение в месте нейтральной оси не имеет резкого уменьшения, напряжение H на наружных точках будет самое большое, так как T всегда гораздо меньше H. Вообще—чем длиннее балка, тем меньше у нее T по отношению к H. У рациональных балок, т.-е. имеющих тонкую вертикальную стенку, T возрастает довольно быстро к нейтральной оси; там желательна поверка полученного из $H_\partial = \frac{M_{max}}{W}$ сечения по косым напряжениям (в особенности в клепанных железных балках), для чего строятся в одном и том же

масштабе эпюры всех напряжений по высоте сечения (т.-е. max ищут исключительно графическим путем). Однако, и в этих случаях нормальное напряжение чаще всего превалирует над тангенциальным, так что максимум сложного (косого) напряжения все равно получается на наружных точках.

§ 54. Применение формул сложного напряжения к расчету прямоугольного бруса и прямого вала. Примеры расчетов на сложное сопротивление.

Найти расчетное напряжение в рамке прямоугольного сечения фиг. 227, заделанной наглухо нижним концом, от силы P, приложенной к углу (весьма близко от угла) D параллельно большей стороне сечения; даны a и d, причем $a > d$. Верхнее (вертикальное) указанное на фигуре сечение сгибается моментом P_c и крутится моментом $P \cdot \frac{b}{2}$; следующее (горизонтальное) выдерживает сгибающий момент $P \cdot \left(f + \frac{b}{2}\right)$ и крутящий $P \cdot d$; эти моменты неопасны. Сечения самого угла между отдельными балками рамы (сечение L и др., фиг. 227) рассчитаны быть не могут, так как пересечение двух брусьев не есть уже брус, а произвольное тело; но здесь и сечения гораздо больше расчетных сечений. Опасными моментами являются действующие в сечении заделки сгибающий момент $P \cdot \left(a + \frac{b}{2}\right) = M$ и крутящий $P \cdot d = M_к$. В точке на средине стороны GE напряжение от момента M равно

$$H = \frac{M}{W} = \frac{6M}{bh^2};$$

от $M_к$ — равно

$$T = \frac{M_к}{\frac{2}{9} bh^2} = \frac{9M_к}{2bh^2}.$$

Сложное напряжение в точке E

(189) (теория 2)
$$H_c = \frac{3}{8} H + \frac{5}{8} \sqrt{H^2 + 4T^2} =$$
$$= \frac{1}{8bh^2} \left[18M + 5\sqrt{36M^2 + 81M_к^2} \right];$$

(158) (теория 3)
$$T_{max} = \frac{1}{2} \sqrt{H^2 + 4T^2} =$$
$$= \frac{1}{2bh^2} \sqrt{36M^2 + 81M_к^2}.$$

В точке же F имеется только напряжение $T_F = \frac{9M_к}{2b^2h}$; точка G не опасна, так как в ней только напряжение $H_G = H$. Расчетное уравне-

ние должно писаться для той точки, в которой напряжение при одних и тех же b и h должно получиться больше.

Так как в $M = P\cdot\left(a+\frac{b}{2}\right)$ входит неизвестная величина $\frac{b}{2}$, то расчет сначала ведется на меньший момент $M = Pa$ и определяются по допускаемому напряжению размеры b и h (должно быть заранее выбрано их отношение $\frac{h}{b}$, равное определенному числу); затем результат проверяется на момент $P\cdot\left(a+\frac{b}{2}\right)$; если b очень невелико по сравнению с a, поверка может не делаться.

Если требуется проследить за напряжениями всех точек от F до G или от G до E с целью поверки, не окажется ли там напряжение несколько больше нашего расчетного, то задача решается исключительно графическим путем.

Найти расчетное уравнение круглого, прямого сплошного вала по заданной внешней нагрузке. Задача также разбивается на две части: прежде отыскивается опасное сечение вала, затем для этого сечения пишется расчетное уравнение, из которого и можно определить d. Графически расчет вала представлен на фиг. 228—234.

Для нахождения опасного сечения строится пять эпюр в следующем порядке. Прежде находится эпюра $M_к$ по § 16. Изгибающая нагрузка (натяжения от ремней, или канатов, или окружные усилия на зубчатых передачах, вес шкивов, колес и пр.) разлагается на силы отдельно в вертикальной и в горизонтальной плоскостях, которые дают отдельно эпюры $M_в$ и $M_г$ сгибающих моментов вертикальных и горизонтальных. Для того, чтобы теперь знать суммарные изгибающие моменты от $M_в$ и $M_г$, достаточно (пользуясь тем, что момент есть вектор) графически сложить все ординаты $M_в$ и $M_г$ по правилу прямоугольника. Суммарный момент $M = \sqrt{M_в^2 + M_г^2}$ уже не имеет единственной плоскости своего действия, — его векторы повернуты в разных сечениях различно. Поэтому эпюра M никак не выражает знака момента; ее ординаты условно совмещены с плоскостью чертежа и дают только величину суммарного момента M. Знание одной величины M совершенно достаточно для круглого вала: при повороте вектора суммарного момента положение его по отношению к поперечному сечению (кругу)—безразлично, где бы этот вектор ни оказался. Точно также и точки, опасные по $M_к$, все находятся на окружности круга поперечного сечения. Значит, опасная точка вала есть: точка окружности опасного сечения, именно—пересечение этой окружности с плоскостью суммарного M в сечении.

Напряжения в этой опасной точке

от момента M $\qquad H = \frac{M}{W}$,

от момента $M_к$ $\qquad T = \frac{M_к}{W_г}$.

Остается найти сложное напряжение.

a) По 2-й теории.

(189) $$H_c = \frac{3}{8}\frac{M}{W} + \frac{5}{8}\sqrt{\frac{M^2}{W^2} + \frac{4M_\kappa^2}{W_0^2}}.$$

В случае круглого сечения расчетные формулы могут быть выражены однообразно—через единственный модуль W. Действительно, так как для круга

(43) (71) $$W_0 = 2W, \tag{193}$$

то

$$H_c = \frac{\frac{3}{8}M + \frac{5}{8}\sqrt{M^2 + M_\kappa^2}}{W}; \tag{194}$$

иначе говоря, можно расчет вала вести по уравнению одного изгиба

$$H_c = \frac{M_c}{W}, \tag{195}$$

в котором M_c есть сложный момент;

$$M_c = \frac{3}{8}M + \frac{5}{8}\sqrt{M^2 + M_\kappa^2}. \tag{196}$$

Диаметр определяется по расчетному уравнению

(71) (195) $$d = \sqrt[3]{\frac{10M_c}{H\partial}} = 2{,}15\sqrt[3]{\frac{M_c}{H\partial}}. \tag{197}$$

b) По 3-й теории.

(158) $$T_{max} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{M^2}{W^2} + \frac{4M_\kappa^2}{W_0^2}} = \frac{1}{2W}\sqrt{M^2 + M_\kappa^2}. \tag{198}$$

Поставив мерою сравнения соотношение при линейном напряженном состоянии (см. § 49)

(178) $$T_{max} = \frac{H_{max}}{2}, \tag{199}$$

(T_{max} находится в плоскостях, составляющих 45° с главными плоскостями), можно (198) представить через нормальное напряжение так:

$$\frac{H_{max}}{2} = \frac{1}{2W}\sqrt{M^2 + M_\kappa^2},$$

или

$$H_{max}=\frac{\sqrt{M^2+M_к^2}}{W},\qquad (200)$$

т.-е. и по 3-й теории расчет на кручение и изгиб сводится к одному изгибу сложным моментом

$$M_T=\sqrt{M^2+M_к^2}\qquad (201)$$

$$H_{max}=\frac{M_T}{W},\qquad (202)$$

откуда окончательное расчетное уравнение

(71) (202)
$$d=\sqrt[3]{\frac{10\,M_T}{H_д}}=2{,}15\sqrt[3]{\frac{M_T}{H_д}}.\qquad (203)$$

Так как

$$M^2=M_в^2+M_г^2,$$

то также

(201)
$$M_T=\sqrt{M_в^2+M_г^2+M_к^2}.\qquad (204)$$

5-я эпюра есть построение сложного момента по (196) или (201), также (204). В тех случаях, когда опасное сечение вала ясно видно, эпюры строятся в меньшем количестве, или не строятся вовсе.

3-ю теорию здесь также нужно предпочесть перед 2-й. Напряжения в гладком вале представляются эпюрой сложного момента; в ступенчатом могут быть построены особо. Эпюра $M_к$ (фиг. 230) построена по § 16, т.-е. для стационарного состояния вала ($\omega = Const$); пуск в ход и остановка меняют в эти мгновения $M_к$; они будут рассмотрены особо. В целом, способ расчета по напряжению $H_д$ не изменяется и при динамической нагрузке.

Прогиб работающего вала должен пониматься как тот предел отклонений центров сечений от оси, который получился бы, если бы силы сохраняли свое направление, вал же не вращался. В таком случае прогиб представляет пространственную кривую пересечения двух взаимно перпендикулярных цилиндрических поверхностей, проведенных через две отдельные упругие линии — от моментов $M_в$ и моментов $M_г$.

§ 55. Косой изгиб. Неравномерное сжатие. В качестве последнего примера сложного сопротивления рассмотрим так называемый косой изгиб и неравномерное сжатие. Косой изгиб получается от одной поперечной нагрузки; неравномерное сжатие (также и растяжение) есть косой изгиб, осложненный еще осевыми силами растяжения и сжатия.

Косой изгиб происходит в том случае, если плоскость действия сгибающего момента в сечении не проходит через главную ось сечения. В этом случае прогиб бруса не может происходить в главной

плоскости, так как не удовлетворяется [(V) § 20] условие равновесия $\int_F xHdF = 0$ (интеграл приводится к виду $\int_F xydF$, но он не равен 0, ибо плоскость действия сгибающего момента теперь через главную ось не проходит). Если торец узкой, закрепленной другим концом линейки нагрузить силой P хотя бы под очень малым углом α к главной оси (фиг. 235), то нагруженный конец будет поворачиваться до тех пор, пока не будет соблюдено условие (V) равновесия сгибающего момента, передаваемого на каждое сечение, с моментом напряжений в нем.

Расчет сечения, нагруженного косым изгибом, можно произвести двумя способами и получить, конечно, один и тот же результат.

1) Косой изгиб можно свести к двум прямым изгибам, разложив момент, действующий в сечении, на два составляющие по главным осям.

Пусть след плоскости действия сгибающего момента M в сечении железа ⌐ (фиг. 236) есть MM; угол между главной осью $1—1$ и MM (плоскостью нагрузки в сечении) α. Разложим внешнюю равнодействующую силу P, момент которой работает в данном сечении, на составляющие $P\mathrm{cs}\alpha$ и $P\mathrm{sn}\alpha$ по главным осям. Тогда к каждой составляющей все изложенное полностью применимо. Оси $1C2$ делят сечение на 4 района с разными знаками напряжений; верхние знаки показаны для $P\mathrm{sn}\alpha$, нижние для $P\mathrm{cs}\alpha$, в предположении, что один конец бруса заделан. Опасные напряжения могут быть только в углах с одинаковыми знаками, причем максимальные находятся в наиболее удаленных точках от каждой оси. Напряжения в E и F (сгибающий момент разложится, аналогично силе, на $M\mathrm{cs}\alpha$ и $M\mathrm{sn}\alpha$; b—расстояние точки E или F от оси $2—2$)

$$H_E = \frac{M\mathrm{sn}\alpha \cdot a}{J_1} + \frac{M\mathrm{cs}\alpha \cdot b}{J_2} = M\left(\frac{a\mathrm{sn}\alpha}{J_1} + \frac{b\mathrm{cs}\alpha}{J_2}\right); \qquad (205)$$

$$H_F = -M\left(\frac{a\mathrm{sn}\alpha}{J_1} + \frac{b\mathrm{cs}\alpha}{J_2}\right). \qquad (206)$$

Тем же способом напряжения найдутся, если по абсолютной величине они окажутся различны.

Найдем положение нейтральной оси. Она может проходить только в четвертях, где напряжение имеет разные знаки; на ней лежат точки с нулевым напряжением; уравнение нейтральной оси (фиг. 236)

(205) $$\frac{y\mathrm{sn}\alpha}{J_1} - \frac{x\mathrm{cs}\alpha}{J_2} = 0. \qquad (207)$$

Нейтральная ось наклонена к главной $1—1$ под углом A, тангенс которого

(207) $$\mathrm{tg}A = \frac{y}{x} = \frac{J_1}{J_2} \cdot \mathrm{ctg}\alpha,$$

откуда

$$\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}A = \frac{J_1}{J_2}, \qquad (208)$$

т.-е. произведение тангенсов углов наклона плоскости действия момента и нейтральной оси к главной оси *1—1* равно отношению $\frac{J_1}{J_2}$ момента инерции относительно этой оси к другому главному моменту инерции.

Чрезвычайно удобно построение нейтральной оси с помощью эллипса инерции. Ведь свойство эллипса инерции и состоит именно в том, что если на нем дается направление нагрузки (фиг. 237), то касательная к нему в точке B его пересечения с грузовой линией определяет и соответственный момент инерции (перпендикуляр на касательную) и нейтральную ось (направление касательной). Действительно (фиг. 237),

$$(208) \qquad \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}A = \frac{r_1^2}{r_2^2}; \quad \operatorname{tg}A = \frac{r_1^2}{r_2^2} \cdot \frac{m}{n};$$

уравнение касательной к эллипсу в точке $B(m, n)$

$$\left[\frac{xx_1}{r_2^2} + \frac{yy_1}{r_1^2} = 1\right]; \qquad \frac{xm}{r_2^2} - \frac{yn}{r_1^2} = 1;$$

тангенс угла наклона касательной к оси x

$$\frac{dy}{dx} = \frac{r_1^2 \cdot m}{r_2^2 \cdot n} = \operatorname{tg}A.$$

На фиг. 236 нейтральная ось могла бы быть построена сразу проведением касательной к точке B и проведением параллели ей через C.

Прогиб по самому смыслу явления (сохранение плоских сечений) должен происходить перпендикулярно к нейтральной оси. Но можно подтвердить это и специальным выводом. Прогиб пропорционален нагрузке, кубу длины балки и обратно пропорционален жесткости. Поэтому прогиб отдельно от силы $P\operatorname{sn}\alpha$ равен (k — коэффициент пропорциональности)

$$f_1 = k \cdot \frac{P \cdot \operatorname{sn}\alpha \cdot l^3}{EJ_1},$$

от $P \cdot \operatorname{cs}\alpha$

$$f_2 = k \cdot \frac{P \cdot \operatorname{cs}\alpha \cdot l^3}{EJ_2}$$

(происходят по главным осям). Суммарный прогиб

$$f = \sqrt{f_1^2 + f_2^2}, \qquad (209)$$

если он перпендикулярен к нейтральной оси, то должно быть

$$\frac{f_2}{f_1} = \operatorname{tg} A$$

$$\left(\frac{f_2}{f_1} = \frac{\operatorname{cs}\alpha \cdot J_1}{J_2 \cdot \operatorname{sn}\alpha} = \frac{J_1}{J_2} \operatorname{ctg}\alpha = \operatorname{tg} A\right).$$

2) Предыдущее непосредственно дает другой способ написания расчетного уравнения бруса (фиг. 236). Если нейтральная ось есть OO, то, проведя через точку C разрез плоскости, перпендикулярной к OO, мы получим в этой плоскости и во всех, ей параллельных, совершенно одинаковый закон изменения нормальных напряжений (фиг. 238) Наиболее напряженные точки E и F находятся от нейтральной оси на расстояниях, как обыкновенно, h_1 и h_2. Обозначая проекцию действующей нагрузки P на направление прогиба f через $P\operatorname{cs}(P, f)$, а соответственную составляющую заданного момента через $M\operatorname{cs}(P, f)$, имеем в виде одночленной формулы [сравнить с (205) и (206)]

$$H_E = \frac{M\operatorname{cs}(P, f) \cdot h_1}{J_A}; \tag{210 a}$$

$$H_F = -\frac{M\operatorname{cs}(P, f) \cdot h_2}{J_A}. \tag{211 a}$$

Здесь J_A — момент инерции относительно нейтральной оси. Так как она составляет с главной $1-1$ угол A, то

$$J_A = J_1 \operatorname{cs}^2 A + J_2 \operatorname{sn}^2 A. \tag{22}$$

Опасные точки E и F видны в этом способе сразу, как наиболее удаленные от нейтральной оси. Таким образом, задача может решаться аналитически нахождением угла наклона A нейтральной линии по уравнению (208); затем применением (22) и подстановкой

$$\operatorname{cs}(P, f) = \operatorname{cs}(A + \alpha - 90^\circ) = \operatorname{cs}\gamma \tag{212}$$

в одночленную формулу

$$H_E = \frac{M\operatorname{cs}\gamma \cdot h_1}{J_A}, \tag{210}$$

$$H_F = -\frac{M\operatorname{cs}\gamma . h_2}{J_A} \tag{211}$$

или с помощью эллипса инерции, который дает и A и J_A.

Общий случай неравномерного (или эксцентрического) сжатия имеет место, если равнодействующая всех сжимающих сечение параллельных оси тела сил P проходит через точку сечения P, не лежа-

щую ни на одной главной оси сечения (фиг. 239) (употребим для точки приложения силы и величины самой силы одно обозначение P). Назовем точку P приложения силы к сечению полюсом. Перенося силу в центр тяжести с приложением соответствующих пар, убеждаемся, что сечение испытывает центральное сжатие силой P, дающее напряжение $\frac{P}{F}$, и косой изгиб, выражающийся двумя составляющими момента относительно осей *1—1* и *2—2*,

$$M_1 = Pn; \tag{212}$$

$$M_2 = Pm. \tag{213}$$

Для произвольной точки $S(x, y)$ напряжение по формуле (205) с добавлением $\frac{P}{F}$ и с соответственной заменой $M \operatorname{sn} \alpha = M_1$ и $M \operatorname{cs} \alpha = M_2$

$$H = \frac{P}{F} + \frac{M_1 y}{J_1} + \frac{M_2 x}{J_2}. \tag{214}$$

В этом уравнении скрыты знаки в обозначениях P, M_1, M_2, x и y. При пользовании уравнением нужно x и y придавать знаки соответственно осям координат, а за P, M_1 и M_2 закрепить один знак за каждой величиной сообразно с тем, растяжение или сжатие производит эта величина в 1-й четверти, где x и y положительны (тогда при постоянном знаке P, M_1 и M_2 и выборе знака для x и y, направление H будет получаться всегда правильно). Уравнение нейтральной линии (она теперь не называется осью, так как не проходит через центр тяжести сечения) получится, если положить $H=0$. Заменяя $J_1 = Fr_1^2$ и $J_2 = Fr_2^2$, имеем

$$1 + \frac{ny}{r_1^2} + \frac{mx}{r_2^2} = 0. \tag{215}$$

Заданный полюс P определяет единственную нейтральную линию, и наоборот, если дана нейтральная линия, то по ее уравнению определяется единственный полюс. Геометрически зависимость нейтральной линии от полюса может быть выражена так. Нейтральная линия отсекает на осях отрезки $x_0 = -\frac{r_2^2}{m}$ и $y_0 = -\frac{r_1^2}{n}$; если бы координатами нового полюса сделать x_0 и y_0, то отрезки, отсекаемые новой нейтральной линией, были бы m и n. Проведем через P произвольную прямую P_1P_2 и передвинем полюс по этой прямой в какую-нибудь точку R. Чтобы узнать, как отзовется это на нейтральной линии, рассмотрим силу P в виде двух составляющих, приложенных в P_1 и P_2 и равных $P \cdot \frac{\overline{P_2R}}{\overline{P_1P_2}}$ и $P \cdot \frac{\overline{P_1R}}{\overline{P_1P_2}}$. Первая составляющая будет давать

нейтральную линию $1+\frac{\overline{OP_1}\cdot x}{r_2^2}=0$, параллельную оси y на расстоянии от нее $OI=-\frac{r_2^2}{\overline{OP_1}}$, вторая — нейтральную линию $1+\frac{\overline{OP_2}\cdot y}{r_1^2}=0$, отстоящую от оси y на $OII=-\frac{r_1^2}{\overline{OP_2}}$.

Так как OP_1 и OP_2 постоянны, то пересечение двух построенных нейтральных линий (точка P) всегда будет иметь напряжение нуль, где бы полюс R на прямой P_1P_2 ни был расположен. Точка P при определенной прямой P_1P_2 фиксирована, все нейтральные линии через нее проходят. Следовательно, если полюс перемещается по какой-либо прямой, нейтральная линия вращается вокруг определенной точки P. Обратное утверждение также справедливо.

Если полюс движется по прямой OP, удаляясь от центра тяжести O, то m и n, оставаясь пропорциональными, возрастают — нейтральная линия движется параллельно самой себе, приближаясь к центру тяжести; если P приближается к O — нейтральная линия удаляется в бесконечность.

Все эти соотношения вполне вяжутся с закономерностью напряжений. Например, при центрально приложенной силе P происходит равномерное растяжение,— нейтральных линий нет. Прямая OP — след плоскости равнодействующего момента — называется силовой линией. Если бы на сечение действовали только одни моменты M_1 и M_2, то по доказанному выше нейтральная ось прошла бы через центр тяжести, а направление ее нашлось бы как диаметр эллипса инерции, сопряженный силовой линии. Концы всех векторов напряжений $H_м$ (только от моментов) в сечении лежали бы в плоскости

(214) $$H_м=\frac{M_1 y}{J_1}+\frac{M_2 x}{J_2}.$$

Фактическое же напряжение H увеличено против $H_м$ на $\frac{P}{F}$; это значит, что фактические концы векторов напряжений находятся на плоскости, выражаемой (214) и параллельной первой. Эти две параллельные плоскости, пересекаются третьей плоскостью (плоскостью сечения) по прямым, параллельным; значит, нейтральная линия всегда параллельна нейтральной оси.

Таким образом, нейтральная линия очень легко строится помощью эллипса инерции, который уже указывает ее направление; и нужно только узнать, как далеко отстоит нейтральная линия от нейтральной оси (или, все равно, от центра O).

Удобнее всего найти это при помощи косого момента инерции J_A относительно нейтральной оси. Напряжение в произвольной точке S другим способом можно написать так:

$$H=\frac{P}{F}+\frac{M\,\mathrm{cs}\,\gamma\cdot a}{J_A},\qquad (216)$$

(a — расстояние точки S от нейтральной оси),

где

$$\cos\gamma = \cos(\overline{OP}, \overline{OF}) = \cos(A + \alpha - 90^\circ) . \qquad (212)$$

Искомое расстояние получится, если сделать $H = 0$;

$$M \cos\gamma = P \cdot OF; \quad a = OZ; \quad J_A = F \cdot r_A^2;$$

$$(216) \qquad 1 + \frac{OF \cdot OZ}{r_A^2} = 0;$$

$$OF \cdot OZ = -r_A^2, \qquad (217)$$

т.-е. радиус инерции сечения относительно нейтральной оси есть средняя пропорциональная между расстояниями до нее же полюса и нейтральной линии. Знак — указывает, что полюс и нейтральная линия находятся всегда по разные стороны от нейтральной оси.

При таком толковании нейтральной линии тоже ясно, что когда $OF = 0$, $OZ = \infty$, и наоборот.

Все выводы не изменяются от того, будет ли происходить неравномерное сжатие или растяжение: величины снабжаются своими знаками.

§ 56. Ядро сечения. Нейтральная линия делит плоскость рассчитываемого сечения на две части разных знаков напряжений.

В зависимости от свойств материала часто бывает необходимо передавать нагрузку на сечение так, чтобы оно или только сжималось или только растягивалось. (Так, например, напряжения растяжения в кирпичных фундаментах, а также в конструкциях, где сечения работают чистым бетоном, признаются недопустимыми.) В таком случае нужно заботиться о том, чтобы нейтральные линии проходили вне очертания сечения, т.-е. нужно найти на контуре сечения такую геометрическую фигуру, чтобы при расположении точки приложения нагрузки (полюса) внутри этой фигуры нормальные напряжения в сечении были одного знака. Такая фигура называется ядром сечения. Для того, чтобы построить ядро какого-либо сечения, нужно провести к сечению достаточное количество касательных (в некоторых же случаях сечение само ограничено прямыми) и, считая ограничивающие прямые за нейтральные линии, строить для каждой из них полюс. Очевидно, число полюсов равно числу касательных, а так как известно, что при вращении нейтральной линии полюс движется по прямой, то найденные полюса нужно соединить прямыми.

Примеры. Прямоугольник (фиг. 240).

Квадрат радиуса инерции одного из направлений

$$r_1^2 = \frac{J}{F} = \frac{h^2}{12};$$

$$(217) \qquad x \cdot \frac{h}{2} = -\frac{h^2}{12}; \quad x = -\frac{h}{6};$$

ядро сечения — ромб с диагоналями, равными $^1/_3$ соответствующих сторон.

Круг (фиг. 241).

$$r_1^2 = \frac{\pi r^4}{4\pi r^2} = \frac{r^2}{4};$$

(217) $$xr = -\frac{r^2}{4}; \quad x = -\frac{r}{4},$$

т.-е. круг диаметра, вчетверо меньшего.

Для двутавра, зета и уголка необходимо проводить лишь наружные обнимающие прямые, так как остальные будут пересекать сечение (фиг. 242—244); радиусы инерции берутся по фактическим моментам инерции настоящего сечения.

А. Общая часть

(продолжение).

XX. О допускаемом напряжении.

§ 57. Общие условия назначения допускаемого напряжения при расчетах. Допускаемое напряжение H_∂ и T_∂ есть то, которое назначается составителем проекта для данного материала и данного способа действия нагрузки для того, чтобы из расчетного уравнения получить геометрические размеры строящейся детали. Оно назначается индивидуально для каждого случая; но существует несколько общих положений, касающихся выбора этой величины.

1) Оно всегда есть правильная дробь от даваемой опытом незыблемой величины—временного сопротивления H_0, T_0, так что

$$H_\partial = \frac{H_0}{m}; \quad T_\partial = \frac{T_0}{m}. \qquad (15)\ (15a)$$

Выбор H_∂, T_∂ облегчается и контролируется выбором запаса прочности m. Минимальная величина m приближается к 2; внешний предел неизвестен, ибо часто—по технологическим, специальным или конструктивным соображениям H_{max}, T_{max} получаются несоразмерно низкие. H_∂ и T_∂ связывает природу и сорт материала с напряжением, действительно получающимся в теле (рабочим напряжением); механически же и геометрически напряжение от названия и качеств материала не зависит; оно зависит только от нагрузки и геометрических размеров.

2) Вообще говоря, не должен быть перейден предел пропорциональности. За этим пределом получаются остающиеся деформации, они растут непропорционально напряжению, нарушается закон Гука, расчет теряет определенность, и становится близко разрушающее напряжение.

Предел пропорциональности очень часто близок к половине временного сопротивления; поэтому при постоянной, статической нагрузке безопасное напряжение должно составлять не более $^1/_2$ временного сопротивления, откуда получается крайний меньший предел $m = 2$.

3) Необходимо точно предусмотреть способ приложения нагрузки. Можно доказать, что при внезапном ее приложении (дина-

мическая безударная нагрузка) напряжения и деформации больше соответственных статических вдвое; при динамической ударной нагрузке — больше, чем вдвое.

Между тем, равновесию внешних сил и внутренних напряжений отвечает именно статическая деформация. Пусть, например, безударно, но внезапно прикладывается к брусу центральная растягивающая нагрузка (предположим, что брус закреплен верхним концом и нагружается на нижнем). Тогда в первый момент удлинение бруса достигает $\frac{2Pl}{EF}$, т.-е. 2λ; но так как внутренние силы упругости могут уравновеситься с внешней нагрузкой только при удлинении λ, то внутренние силы начинают сокращать брус, удлинение опять доходит до λ и даже делается еще меньше; но внешняя нагрузка опять заставляет его удлиняться и т. д. Возникают колебания, постепенно затухающие и доводящие брус до окончательного удлинения λ; но в первый момент и деформация и напряжение были двойные, следовательно, в этих случаях безопасное напряжение должно составлять не больше $^1/_4$ временнного сопротивления.

4) Способ действия нагрузки выражается не только в том, будет ли она статической или динамической безударной и ударной. Есть случаи кратковременного действия сил, которые беспрестанно то прикладываются, то отнимаются, действуя или в одну или попеременно в обе стороны (грузовой тросс крана, шток паровой машины). Валы машин вследствие своего вращения испытывают разнонаправленные чередующиеся нагрузки, несмотря на то, что сами силы действуют неизменно в одну сторону. Такая нагрузка называется $0, P$ или $P, 0, -P$. Опыты показывают, что при такой нагрузке m должно быть увеличено.

5) Есть случаи, когда даже большая величина m не спасает от опасных напряжений. При неравномерном движении системы возникает, помимо полезной, дополнительная нагрузка в виде ее сил инерции. По принципу Даламбера (d'Alembert) всякая движущаяся система должна рассматриваться как неподвижная с приложенными к ней в каждый момент движения силами инерции. При больших ускорениях или замедлениях силы инерции достигают очень большой величины, иногда сравнивающейся с полезной нагрузкой, а в некоторых случаях даже превосходящей ее. Поэтому в быстроходных системах является совершенно необходимым подсчитывать силы инерции и находить окончательное рабочее напряжение от нагрузки + силы инерции (например, рассчитывать систему при ее пуске в ход и остановке и т. п.). Так как силы инерции повышают рабочее напряжение, то, следовательно, желательно увеличение m. Но, с другой стороны, увеличение m влечет за собою увеличение размеров, а значит, и сил инерции.

6) В пункте 3 этого параграфа дан пример так называемых собственных колебаний системы, возникших за счет собственных сил сопротивления, хотя и вследствие приложенных внешних сил. Собствен-

ные колебания возникают и при других видах нагрузок—при кручении, изгибе. При работе системы может случиться, что меняющаяся нагрузка будет иметь свой период как раз равным (синхронным) периоду собственных колебаний каких-либо частей системы. Тогда наступает явление так называемого резонанса колебаний. Хотя мы до сих пор не знаем достоверно, какое время нужно материалу для того, чтобы в нем возникло после приложения нагрузки соответствующее напряжение, но, повидимому, время это очень мало. Мы считаем его равным 0, т.-е. полагаем, что напряжение возникает мгновенно. (Некоторые примеры явлений говорят, что это время не совсем нуль, а, кроме того, в каждом отдельном случае и при разных материалах оно различно.) Резонанс способствует увеличению амплитуды колебаний, т.-е. увеличивает деформации. (Были примеры, когда при одном числе оборотов вал работал, а при другом числе оборотов, соответствующем периоду его собственных колебаний, разрушался.)

Указанное явление также не дает возможности обезопасить систему увеличением m.

7) Собственный вес системы при подсчете m должен приниматься во внимание.

8) Длительное и многократное повторение нагрузки (что и имеет место в машинах) влечет за собою усталость материала. Она выражается в постепенном перерождении структуры материала, превращении ее в более зернистую (кристаллическую). В машинах, предназначенных для очень - длительной работы, m должно быть больше, чем в машинах, строящихся на недолгое время.

9) Напряжения могут возникать без приложения внешних сил. Сюда относятся: температурные напряжения и первоначальные технологические напряжеиия (при отливке и термической обработке материалов). Под влиянием этих напряжений материал нередко дает трещины [неравномерное сокращение при остывании после отливки тонких и толстых частей детали; или—охлаждение наружного слоя (например, при закалке), сокращению которого мешает внутренняя горячая часть]. Здесь на окончательное m системы влияет конструкция детали и самый способ технологической обработки.

10) Временное сопротивление H_{θ}, T_{θ} представляет постоянную величину для данного материала лишь при постоянной температуре. При повышении температуры оно изменяется, сначала несколько повышаясь, затем резко падая (см. II часть курса). Падение начинается приблизительно после 300°С.

При назначении или поверке m зависимость H_{θ}, T_{θ} от температуры должна учитываться.

11) Излишнее увеличение m неэстетично, дорого и противоречит основному принципу Техники—наилучший результат при наименьшей затрате времени и средств.

ЧАСТЬ ВТОРАЯ

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНО-СПРАВОЧНАЯ ЧАСТЬ.

Часть вторая.

Эта часть есть дополнение и иллюстрация к теории (части I), обозначения глав которой здесь сохранены.

Гл. II, § 6.

Случаи несоблюдения гипотезы Бернулли: кручение брусьев некруглого поперечного сечения; растяжение ремней.

При изгибе чугуна—материала, имеющего лишь приближенную пропорциональность напряжений и деформаций (см. конец § 6 части I), т.-е. не подчиняющегося закону Гука, гипотеза Бернулли, как показывает опыт, все же справедлива; но закон изменения напряжений по высоте поперечного сечения—не прямолинейный [1]). При практических подсчетах можно без существенной ошибки считать его за прямолинейный. При требовании точного решения необходимо предварительно экспериментально установить для чугуна, из которого будет отливаться деталь, точную зависимость между напряжениями и деформациями. Так, например, Бах *(C. Bach, Elastizität & Festigkeit)* дает для чугуна при растяжении

$$H^{1,1} = 1150000\,e, \tag{1}$$

при сжатии

$$H^{1,052} = 1217000\,e. \tag{2}$$

Для ремня при растяжении

$$H^{0,7} = 415\,e. \tag{3}$$

Общий вид таких зависимостей, предложенный Бахом,

$$H^{m} = Ee. \tag{4}$$

Составляя уравнения, связывающие внешнюю силу или момент с внутренней силой или внутренней парой в сечении,

$$\int_F H dF = E^{\frac{1}{m}} \int_F e^{\frac{1}{m}} dF = P$$

---

[1]) При изгибе чугунной балки поперечной нагрузкой нейтральный слой, строго говоря, несколько смещается с центров тяжести сечений (подобно кривому брусу).

или

$$\int_F H y dF = E^{\frac{1}{m}} \int_F e^{\frac{1}{m}} y dF = M$$

(см. § 13 части I, поясняющий состав уравнений), можно найти напряжения *(С. П. Тимошенко, Курс Сопротивления Материалов)*.

Местные напряжения и перенапряжения. В точно исполненных прямых углах C и D бруса (фиг. **1**) напряжения равны ∞.

Если углы закруглить хотя бы ничтожным радиусом, напряжения резко падают по величине. Резкие изменения сечения тем опаснее, чем хрупче материал и, в особенности, чем менее постоянна нагрузка (опасность повторных нагружений).

Пример напряжений при круглом отверстии в полосе—фиг. **2**. Если диаметр отверстия в полосе мал по сравнению с шириной полосы, то напряжение в точке B можно вычислить по формуле

$$H_B = \frac{H_{сред}}{2}\left(2 + \frac{r^2}{\varrho^2} + 3\frac{r^4}{\varrho^4}\right), \quad \textbf{(5)}$$

где $H_{сред}$ есть среднее напряжение $\frac{P}{F}$. При $r = \varrho$ (у краев отверстия)

$$H_C = 3H_{сред}. \quad \textbf{(6)}$$

При ослаблении полосы полукруглыми вырезами по краям при малом радиусе выкружки по сравнению с шириной полосы (фиг. **3**).

$$H_{max} = \backsim 2H_{сред}. \quad \textbf{(7)}$$

Основные нормы строительных заклепок. Употребительные диаметры заклепок от 8 до 26 mm для строительной (прочной) клепки и до 30 mm для котельной (прочно-плотной) клепки.

Нормальные диаметры выражаются четным числом миллиметров 8, 10, 12 и т. д. Соотношения размеров нормальной *строительной* заклепки показаны на фиг. **4**. Диаметр заклепки подбирается в зависимости от толщины δ склепываемых полос по эмпирической формуле. Бахом был произведен ряд опытов с целью получения, главным образом, размеров заклепок для паровых котлов и даны эмпирические формулы, которые оказалось возможным распространить с небольшими изменениями и на случаи строительной клепки. По Баху для строительной клепки

$$d = \sqrt{5\delta} - (0{,}2 \text{ до } 0{,}7) \text{ cm}, \quad \textbf{(8)}$$

d — диаметр заклепки в cm, δ — толщина склепываемых полос в cm. Формула неоднородна, т.-е. размерность в ней не соблюдена. Вычитаемое выбирается от 0,2 до 0,4 cm при односрезных заклепках и от 0,4 до 0,7 cm при двусрезных; вообще делается

d не больше 2δ при односрезных, **(9)**

d не больше $1{,}75\delta$ при двусрезных заклепках, **(10)**

но считается обязательной поверка диаметра заклепки на смятие по уравнению (6) части I [1]). Если $R = \frac{P}{m}$, то

$$\frac{P}{m\delta d} \leq H_{\partial\, смятия}, \qquad \textbf{(11)}$$

причем

$$H_{\partial\, смятия} = 2000 \text{ kgcm}^{-2}.$$

Иногда, для необходимости соблюдения **(11)**, условия **(9)** и **(10)** не соблюдаются.

Напряжение **(11)** всегда относится к проекции цилиндра заклепки δd. Уравнение (7) проверялось на опыте; оказалось, что максимальное напряжение больше подсчитываемого по формуле (7) приблизительно на 40% *(R. Krell, Entwerfen im Kranbau).*

Общая толщина склепываемых полос не должна превосходить $4{,}5\,d$.

Ширина склепываемых полос или углового железа должна быть не меньше $3^1/_2\ d$, или, что то же (фиг. **5**),

$$d \text{ не больше } \frac{b-\delta}{3}. \qquad \textbf{(12)}$$

Если на полосе углового железа будет стоять только один ряд заклепок, то обыкновенно оси заклепочных отверстий располагаются в средине внутренней ширины полки $b-\delta$, или подвигаются к углу угольника, но так, чтобы от ближайшей к углу точки головки заклепки оставалось до стенки не меньше 6 — 7, а лучше 10 mm, (фиг. **6**):

$$K_{min} = 6 - 7, \text{ лучше } 10 \text{ mm}. \qquad \textbf{(13)}$$

При сопряжении угольников в ферменный узел (фиг. **7**) они укладываются так, чтобы оси многоугольника фермы (направления усилий стержней фермы) проектировались в одну прямую с геометрическими осями (иначе, с центрами тяжести сечений) элементов фермы, т.-е. при одном угольнике или двух, сложенных способом ⏋⎾ (обыкновенно применяется для сжатых элементов), углы угольников находятся от сторон многоугольника фермы на расстоянии центров тяжести Z_0, взятом из сортамента углового железа; при расположении

1) Номера формул части I набраны светлыми цифрами, в отличие от номеров формул части II, набранных жирным шрифтом. В дальнейшем, поэтому, оговорок, что формула относится к части I, не будет. То же относится и к нумерации фигур: для фигур I части—светлые цифры, II части— жирные.

угольников ⏋⎿ (применяется для растянутых элементов) прямые многоугольника фермы проектируются на средины высоты профиля угольников. В случае непрерывного сопряжения элементов разной высоты и размеров, при требовании, чтобы плоскости полок на одной стороне у элементов фермы совпадали, допускается расстояние центров тяжести сечений элементов от этих плоскостей брать среднее арифметическое всех идущих в одну прямую элементов. Таким образом, эксцентрицитет между направлениями действия силы и осями заклепок обусловливается указанными выше соотношениями.

По направлению действующего усилия число заклепок не должно быть больше 4 (очень редко делают 5) (фиг. **8—9**), ибо больше всех нагружаются первые заклепки, ближайшие к сечениям, в которых действует полная сила по полосе; 5 рядов предпочтительнее ставить в случае фиг. **10—11**, нежели фиг. **8—9**. [Все ряды заклепок были бы нагружены совершенно поровну только при абсолютно неупругих склепываемых листах; теоретический разбор этого вопроса сделан Ясинским *(Ф. С. Ясинский, собр. сочинений, том I).*]

Шаг заклепок по направлению действующего усилия при обыкновенном (не шахматном) шве

$$e_1 = 3^1/_2\, d \text{ иногда до } 6^1/_2\, d, \text{ никак не меньше } 3d. \qquad \textbf{(14)}$$

Шаг заклепок, не работающих, а лишь склепывающих листы и угловое железо,

$$e_{\text{соединительных заклепок}} = (8 - 10)\, d. \qquad \textbf{(15)}$$

Шаг заклепок перпендикулярно к направлению действующего усилия — по расчету прочности листа, но никак не меньше $3d$ (лучше $3^1/_2\, d$), или также

$$t = 3d + 0{,}5 \text{ cm, нормально до } 4{,}5\, d. \qquad \textbf{(16)}$$

Расстояние от края листа или угольника до оси первой заклепки по направлению действующего усилия не меньше $2d$ и не больше $2{,}5\, d$:

$$e = 2d \quad \text{или} \quad e = (2 - 2{,}5)d. \qquad \textbf{(17)}$$

Расстояние по перпендикулярному направлению к действующему усилию от края листа или угольника до оси крайней заклепки не меньше $1{,}5\, d$ (фиг. **12—14**),

$$t_0 = 1{,}5\, d. \qquad \textbf{(18)}$$

Фиг. **12—14** дают эпюры сил в склепываемых листах и накладках, отнесенные к осям заклепок в предположении, что все заклепки работают одинаково, т.-е. каждая передает силу (в данном случае) $\frac{P}{4}$.

При сравнении угольников (фиг. 6) соблюдаются те же правила, выдерживается K_{min}, формула **(13)** и расстояние оси заклепки от края угольника не может быть меньше 1,5 d.

При шахматном расположении заклепок, безразлично при угольниках или полосах (фиг. **15**), расстояние между заклепками по диагонали l не меньше 3,5 d:

$$l_{шахматн.} \text{ не меньше } 3{,}5\,d \qquad \textbf{(19)}$$

а между рядами t не меньше $2d$;

$$t_{шахматн.} \text{ не меньше } 2d. \qquad \textbf{(20)}$$

В случае, если необходимо все-таки еще уменьшить t, то можно предельно довести его до 1,8 d, но тогда уже l должно быть от $4d$ до 4,5 d.

Площадь сечения угольника цельная называется F или F_{brutto}; площадь сечения угольника за вычетом площади, соответствующей заклепочному отверстию, называется F_{netto}.

Расчетное уравнение угольника

$$H_{д} \geqq \frac{P_{угольника}}{F_{netto}}. \qquad \textbf{(21)}$$

$H_{д\,растяжения}$ (так называемое основное напряжение) 1000 kgcm^{-2}.

$H_{д}$ сжатых элементов подбирается по коэффициенту уменьшения $\varphi < 1$

$$H_{д\,сжатия} = \varphi \cdot H_{д} \qquad \textbf{(22)}$$

(см. продольный изгиб).

При предварительных подсчетах можно принимать

$$F_{netto} = (0{,}88 - 0{,}85)\; F_{brutto}, \qquad \textbf{(23)}$$

затем, после подбора сечения, напряжение проверяется, и соблюдается условие **(21)**.

Расчетное уравнение заклепки

$$\text{(4 a)} \qquad T_{д} \geqq \frac{P}{mnF_{з}}. \qquad \textbf{(24)}$$

ТАБЛИЦА I.

Значения величин $F_{з} = \frac{\pi d^2}{4}$.

d (mm)	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26
$F_{з}$ (cm^2)	0,50	0,785	1,13	1,54	2,01	2,54	3,14	3,80	4,52	5,31

Расчет ведется так, как будто заклепки срезаются каждая приходящимся на нее усилием. Допускаемое напряжение выбирается

$T_{д\ заклепки} = 600 - 650$, не выше 800 kgcm^{-2}.

На самом деле, как показал Бах, среза заклепок в правильно исполненном заклепочном шве не происходит *(C. Bach, Maschinenelemente)*, так как заклепки, остывая, сокращаются и стягивают листы усилиями, направленными по оси заклепок. Следовательно, действующее по полосе усилие уравновешивается силами трения в стыке склепанных полос. Но возникающие силы трения при прочих равных условиях зависят от площади поперечного сечения заклепки, почему Бах и относит эти силы к площади заклепки $F_з$, т.-е. пользуется величинами $\frac{R}{F_з}$. Он назначает нормы для этих величин, имеющих размерность напряжения kgcm^{-2}, из опыта. Таким образом, расчетное уравнение заклепки, написанное по Баху, имеет тот же математический вид, что и формула **(24)**. С другой стороны, возможность среза заклепки в некоторых случаях не исключается: это должно происходить тогда, когда заклепки, стянув листы, все-таки почему-нибудь окажутся не в состоянии возбудить в стыках склепанных листов сил трения, достаточных для уравновешивания действующего усилия. Отсюда теоретически мыслимый предел—отсутствие сил трения между листами, f (коэффициент трения) $= 0$. Тогда, конечно, заклепки держат усилие только своей площадью.

Возможный общий случай, это—уравновешивание действующего усилия и силами трения и срезом $R = R_{трения} + R_{среза}$, причем отношение $\frac{R_{трения}}{R_{среза}}$ неизвестно. Вот почему возможно отнести все к срезу, с назначением такого большого, искусственно увеличенного допускаемого T.

При расчете полос с произвольно большим числом заклепок, поставленных безразлично — рядовым или шахматным способом (фиг. **16** и **17—19**), удобнее всего относить расчет к полоске с шириною, равною шагу t заклепок (заштрихована). На эту полоску действует сила P_t. Опасные сечения листов: *1* (верхнего) и *2* (нижнего) на фиг. **16**, *3* — на фиг. **17**, так как отношение напряжений в сечениях *3* и *4* на фиг. **17**

$$\frac{H_3}{H_4} = \frac{P_t}{\delta(t-d)} : \frac{0{,}8P_t}{\delta(t-2d)} = \frac{5(t-2d)}{4(t-d)}$$

получается после подстановки числовых значений больше 1 (оно было бы равно 1 при $t = 6d$ — возможном крайнем пределе шага между заклепками; берется же t несколько $> 6d$). Опасные сечения накладок *5*, фиг. **17**.

Расчетное уравнение листа

$$H_д \geq \frac{P_t}{\delta(t-d)} = \frac{P_t}{\delta t \eta}, \qquad \textbf{(25)}$$

где

$$\eta = \frac{t - d}{t} \qquad (26)$$

— так называемый коэффициент прочности шва.

При предварительных подсчетах η выбирается по табл. II.

ТАБЛИЦА II.

Значения коэффициента η для заклепочных швов.

Тип шва.	η
Однорядный в нахлестку	0,65
Двухрядный „ „ простой	0,70
„ „ „ шахматный	0,70
Трехрядный „ „ „ *)	0,80
Однорядный с двумя накладками	0,70
Двухрядный „ „ „ простой . . .	0,75
„ „ „ „ шахматный .	0,75
Трехрядный „ „ „ *)	0,85

*) В первом ряду шаг двойной, подобно фиг. 17.

По установлении размеров величина η должна проверяться. Ошибка принятого η по сравнению с подсчитанным окончательно должна быть не больше 10%.

Если элемент конструкции нагружен не только осевой силой, но еще и на изгиб (фиг. **20—21**), то m заклепок нагружаются двумя срезающими силами P и Q, т.-е. силой $\sqrt{P^2 + Q^2} = R$. На каждую заклепку приходится сила (на все поровну) $\frac{R}{m}$. Кроме того, на все m заклепок действует момент Pl, так как в центре тяжести O всех заклепок нужно мысленно приложить две равнопротивоположных силы P.

Пусть $m = 5$. Наиболее нагруженная заклепка от момента — отстоящая на самое далекое расстояние от O, если считать, что поворот всей системы будет происходить вокруг этой неподвижной точки O, так как она должна при таком повороте претерпеть наибольшую деформацию сдвига. Пусть $c > a > b$. Так как деформации должны быть пропорциональны плечам c, a и b, а силы сдвига C, A и B пропорциональны производимым ими деформациям, то

$$A : B : C = a : b : c;$$

сумма моментов относительно O

$$2Aa + 2Bb + Cc = Pl;$$

$$A = C\frac{a}{c}; \quad B = C\frac{b}{c}; \quad C = \frac{Plc}{2a^2 + 2b^2 + c^2}.$$

Расчетное уравнение для правой заклепки фиг. 21 (направление сил C и $\frac{P}{m}$ в данном случае совпадают)

$$\sqrt{\left(\frac{P}{m} + C\right)^2 + \frac{Q^2}{m_2}} \leq F_s \cdot T_\partial;$$

при произвольном направлении сил $\frac{R}{m} = \frac{\sqrt{P^2 + Q^2}}{m}$ и C уравнение напряжений заклепок имеет вид:

$$C \dashrightarrow \frac{R}{m} = F_s \cdot T_s. \qquad \textbf{(27)}$$

Для исчисления веса конструкций нужно добавлять к весу железа веса заклепочных головок.

Вес 1000 штук заклепочных головок в kg при удельном весе заклепочного железа $\gamma = 7{,}85$ gr cm^{-3} и d в cm при высоте головки $0{,}6d$

$$G_{\text{головок}} = 5{,}07\, d^3 \,\text{kg}, \qquad \textbf{(28)}$$

что можно выразить таблицей.

ТАБЛИЦА III.

Вес 1000 штук заклепочных головок.

d (mm)	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26
$G_{\text{головок}}$ (kg)	2,54	5,07	8,76	13,74	20,80	29,60	40,6	53,6	69,8	88,5

Болтовые соединения (фиг. 22—27) работают так, что болты нагружены каждый своей осевой силой затяжки P, возбуждая на стыках соединяемых частей силы трения Pf, где f есть коэффициент трения стыкаемых поверхностей. Болты ставятся в отверстиях, диаметр которых на 2—4 mm больше диаметра тела болта. На срез, т.-е. плотно пригоняя болты к отверстиям, болты нагружают очень редко, ибо это обходится дороже. Опасным сечением болта, работающего на затяжку, является поперечное сечение в месте нарезки, в плоскости прикосновения гайки (и во всех прочих поперечных плоскостях резьбы, считая от указанной плоскости по направлению *к головке* болта). Условлено напряжение разрыва болта относить к кругу,

имеющему внутренний диаметр резьбы d_1 (хотя фактическое сечение очерчено в случае треугольной резьбы Архимедовыми спиралями)

$$F_{болта} = F_б = \frac{\pi d_1^2}{4} = 0{,}785 d_1^2. \tag{29}$$

В таблице: $G_г$ — вес гайки, $G_{гол}$ — вес головки, $G_ш$ — вес шайбы, G_{10} — вес каждых 10 cm тела болта в kg. Болт считается ненарезанным, т.-е. по наружному диаметру d.

Остальное три величины (см. §§ 20 и 15 части I):

$W = \frac{\pi d^3}{32}$ — модуль сопротивления изгибу, считанный по наружному диаметру;

$W_1 = \frac{\pi d_1^3}{32}$ — то же, в месте нарезки (условно по кругу d_1);

$(W_0)_t = \frac{\pi d_1^3}{16}$ — модуль сопротивления кручению в месте нарезки (условно по d_1).

Затянутые болты (фиг. **22—23**) возбуждают в двух местах стыков на каждом брусе силы $P_б \cdot f$, где $f = \infty 0{,}3 - 0{,}4$; m — число болтов на одном брусе ($m = 4$).

$$2m P_б \cdot f = P.$$

Уравнение напряжений болта, после подстановки $P_б = H_б F_б$,

$$H_б = \frac{P}{2mf \cdot F_б}.$$

Допускаемое напряжение болтов $H_{дб}$ от 600 до 800 kgcm^{-2}; но нужно, чтобы при этом напряжении они были в состоянии создать силу, несколько бо́льшую, чем заданное P (*П. К. Худяков, Сопротивление Материалов*); вводя поэтому в правую часть коэффициент запаса $\xi = 1{,}5$, имеем расчетное уравнение болтов

$$H_{дб} \geqq \frac{\xi P}{2mf \cdot F_б} = \frac{1{,}5\, P}{2mf \cdot F_б}. \tag{30}$$

Расчетное уравнение накладок для фиг. **22—23** (среднее напряжение в предположении равномерного распределения напряжений по площади сечения накладок)

$$H_{д\,накл} \geqq \frac{P}{2\delta(h_1 - D)} \tag{31}$$

или

$$H_{д\,накл} \geqq \frac{3}{4} \cdot \frac{P}{2\delta(h_1 - 2D)}, \tag{32}$$

смотря по тому, в *3* или *2* сечении напряжение накладки больше.

$H_д$ железной накладки 400 — 700 kgcm^{-2}.

ТАБЛИЦА IV.

ДАННЫЕ ДЛЯ БОЛТОВ С НАРЕЗКОЙ ВИТВОРТ

[английское обозначение B. S. W. (Biitish Standard Whitworth Screw Threads)].

d''	1/2	5/8	3/4	7/8	1	1 1/8	1 1/4	1 3/8	1 1/2	1 5/8	1 3/4	1 7/8	2	2 1/4	2 1/2	2 3/4	3
$F_б$ (cm²)	0,78	1,31	1,96	2,72	3,57	4,50	5,77	6,84	8,39	9,50	11,31	12,83	14,92	18,87	24,02	28,80	35,15
$G_г$ (kg)	0,035	0,058	0,104	0,134	0,186	0,275	0,356	0,463	0,559	0,725	0,870	1,109	1,277	1,793	2,417	3,196	4,037
$G_{гол}$ (kg)	0,031	0,054	0,095	0,129	0,194	0,274	0,368	0,470	0,605	0,770	0,966	1,189	1,392	1,949	2,672	3,513	4,480
G_{10} (kg)	0,104	0,157	0,221	0,324	0,414	0,515	0,627	0,750	0,932	1,081	1,241	1,412	1,593	2,061	2,509	3,002	3,632
$G_ш$ (kg)	0,013	0,018	0,036	0,049	0,058	0,062	0,074	0,113	0,170	0,196	0,247	0,274	0,344	0,487	0,585	0,801	1,118
Нарезок на 1″	12	11	10	9	8	7	7	6	6	5	5	4 1/2	4 1/2	4	4	3 1/2	3 1/2
$(W_0)_1$ (cm³)	0,20	0,42	0,78	1,26	1,90	2,68	3,90	5,04	6,82	8,20	10,70	12,94	16,22	23,12	33,00	43,80	58,80
W_1 (cm³)	0,10	0,21	0,39	0,63	0,95	1,34	1,95	2,52	3,41	4,10	5,35	6,47	8,11	11,56	16,50	21,90	29,40
W (cm³)	0,20	0,38	0,68	1,07	1,61	2,28	3,14	4,18	5,43	6,88	8,62	10,60	12,87	18,22	25,00	33,50	43,50

Расчетное уравнение деревянных брусьев для фиг. **22—23**

$$H_{\partial\ дер} \geqq \frac{P}{b\,(h - D_1)} \qquad \textbf{(33)}$$

или

$$H_{\partial\ дер} \geqq \frac{3P}{4b\,(h - 2D_1)}, \qquad \textbf{(34)}$$

смотря по тому, в *1* или *2* сечении напряжение бруса больше.

H_∂ дерева: 40 — 80 $kgcm^{-2}$ (сосна, дуб), 30 — 60 $kgcm^{-2}$ (ель);

$$h_1 = h - (0{,}5 - 0{,}1)\ \text{cm}. \qquad \textbf{(35)}$$

Срез, сдвиг, изгиб. Срез есть явление отрыва и перемещения частиц материала одних относительно других по плоскости, параллельной направлению силы, или по цилиндрической поверхности, образующие которой параллельны направлению силы. Срез не имеет ничего общего со сдвигом — явлением более сложного, объемного, внутреннего характера перекашивания отдельных внутренних параллелепипедов без изменения их объема (§ 47, часть I). Срез может возникнуть только при *плотном* примыкании деталей—срезающей и терпящей срез (например, листа и стержня точеного болта, плотно заполняющего отверстие в листе). В случае, если этого плотного соединения нет, срез переходит в изгиб. Так как не всегда можно ручаться за плотность примыкания, то в этих случаях необходимо производить расчеты отдельно на срез и на изгиб и осуществлять размер, больший из двух полученных.

Примеры среза. Врубка. В случае фиг. **28—29** зуб врубки рассчитывается на срез по уравнению

$$P\,\text{cs}\,\alpha - P\,\text{sn}\,\alpha \cdot f = T \cdot ab,$$

$$T_\partial \geqq P \cdot \frac{\text{cs}\,\alpha - f\,\text{sn}\,\alpha}{ab}. \qquad \textbf{(36)}$$

T_∂ берется 20 — 40 $kgcm^{-2}$ (дуб, сосна), 15 — 30 $kgcm^{-2}$ (ель), f — коэффициент трения дерева по дереву 0,35 — 0,45 до 0,5. Напряжение среза возможно считать за равномерное лишь в пределах пропорциональности. При достижении разрушающего напряжения явление осложняется; так, было бы неправильно определять действующую силу или работу продавливания пуансоном листа на фиг. **30** по равномерному напряжению T_0 на поверхности πdh (*Худяков, Сопротивление Материалов;* см. также курсы Механической Технологии); усилие продавливания переменно: вначале при вдавливании пуансона оно растет по мере углубления, затем падает, и, наконец, когда уже началось перерезание материала, закон изменения усилия внезапно

нарушается, а самое усилие падает до 0. Итак, T-напряжения за все время процесса различны по величине.

Дерево слабее на срез при действии сил параллельно волокнам; соотношение временных сопротивлений $\parallel$ и $\perp$ волокнам можно принять около

$$\frac{(T_{\parallel})_0}{(T_{\perp})_0} = \backsim 0{,}7 - 0{,}8, \tag{37}$$

соответственно чему делается выбор допускаемых напряжений T_{∂}.

Проушины. Еще одним важным примером из тех, когда мы не подсчитываем напряжение точно (ограничение 3-е, часть I) является расчет проушин (фиг. **31**—**33**). Проушина есть кривой брус, у которого в сечениях, указанных на фиг. **31**, происходит не только растяжение, но и изгиб. Однако, подсчеты по формулам кривого бруса дали результат, не совпадающий с опытом (*Тимошенко, Курс Сопротивления Материалов*). Простой расчет, дающий близкое совпадение с опытом, есть расчет по формуле Ляме (Lamé)

$$H_{max} = p \cdot \frac{R^2 + r^2}{R^2 - r^2} \tag{38}$$

(обозначения на фиг. **32** и **33**) в предположении, что давление p распределено равномерно по проекции внутренней цилиндрической поверхности δd, хотя фактически оно должно быть распределено по серпообразной кривой. В общем случае угла 2α (фиг. **33**) можно написать

$$P = 2\int_0^{\alpha} p\,\delta\,r\,d\varphi\,\mathrm{cs}\,\varphi = 2\,p\,\delta\,r\,\mathrm{sn}\,\alpha;$$

$$p = \frac{P}{2\,\delta\,r\,\mathrm{sn}\,\alpha}; \tag{39}$$

$$H_{\partial} \geqq \frac{P}{2\,\delta\,r\,\mathrm{sn}\,\alpha} \cdot \frac{R^2 + r^2}{R^2 - r^2}. \tag{40}$$

При $\alpha = 90^\circ$

$$p = \frac{P}{2\,\delta\,r}; \tag{41}$$

$$H_{\partial} \geqq \frac{P}{2\,\delta\,r} \cdot \frac{R^2 + r^2}{R^2 - r^2}. \tag{42}$$

В случае круглого сечения, его, по Тимошенко, возможно заменить равновеликим прямоугольным, у которого

$$R - r = d \tag{43}$$

— диаметру круга сечения; тогда, следовательно,

$$\delta = \frac{\pi d}{4}. \qquad \textbf{(44)}$$

При пользовании расчетной формулой для основной части стержня $H = \frac{P}{b\,\delta_1}$ (фиг. **31**) нужно иметь в виду, что при большом отношении $\frac{b}{\delta_1}$ сторон прямоугольника напряжения будут распределяться неравномерно. Поэтому нужно делать в деталях, подобных фиг. **31**,

$$\frac{b}{\delta_1} \text{ не больше } 6. \qquad \textbf{(45)}$$

Понятие об испытаниях; диаграммы испытаний материала. Добывание или приготовление строительных материалов составляет задачу Горного Дела и Механической Технологии. Эта операция, требующая огромных знаний и труда и непрерывно совершенствующаяся, дает естественные и искусственные строительные камни, чугун различных сортов, железо, сталь самых разнообразных свойств, начиная от мягкой, приближающейся по составу и свойствам к железу, и кончая самой твердой, требующей больших усилий и высокой техники для своей обработки, стойкой, не боящейся больших напряжений. Всю существующую в Технике сталь можно разделить на два класса; углеродистую, в которой основным химическим элементом, обусловливающим ее свойства, является углерод (C), и специальную— еще более разнообразную, в которой, кроме углерода, участвуют и влияют на ее свойства некоторые металлы, например марганец (Mn), никкель (Ni), хром (Cr), вольфрам (W), ванадий (V) и некоторые другие. Все перечисленные элементы входят, вообще говоря, в небольших процентных количествах по весу (особенно углерод, который входит в сталь в количестве $\backsim$ от $0{,}15\%$ до $0{,}8\%$), основную же по количеству химическую часть железа, стали и чугуна составляет железо (Fe). Те же отрасли Техники приготовляют сплавы, обрабатывают также дерево для придания ему форм, годных для стройки, и пр. Усилия Техники везде здесь направлены к тому, чтобы получить практически однородный продукт, освободиться от вредных для металла примесей—серы, фосфора, входящих в небольших количествах, или, по крайней мере, оставить их в таком количестве, чтобы они были невредны (они делают металл ломким).

Уже теперь достигнута возможность во многих случаях получить сталь наперед заданных механических свойств, с заранее обусловленными пределами напряжений.

Для того, чтобы быть в состоянии опереться в расчетах на действительные физические величины, присущие данному материалу, нужно вообще проделать следующую работу.

1) *Принять* материал, т.-е. поручиться, что вся присланная партия металла (иногда очень большая) практически однородна, не

содержит брака (или этот брак удален) и годится для пользования. Эта работа требует специальных знаний и очень большого опыта.

2) Необходимо из разных штук присланного материала изготовить образцы для испытания. Здесь требуется большая точность и строгое исполнение установленных размеров и норм.

3) Необходимо создать машины для испытаний образцов; задача усложняется тем, что часто нужно рвать или раздавливать образцы прочного материала и не очень малые по размерам; следовательно, прикладывать большие усилия, порядка 20, 30, 50, 100, 150 тонн и больше. Нужно, кроме того, чтобы эти же машины с большой степенью точности позволяли измерять прикладываемые большие силы и, в то же время, ничтожные по величине деформации образцов. Эта труднейшая область Техники вызвала к жизни целый ряд специалистов-заводов, изготовляющих испытательные машины.

4) Наконец, необходимо произвести испытание образцов, что обыкновенно делается специальными Механическими Лабораториями, т.-е. провести опыты, замеры и обработать результаты так, чтобы они теснейшим образом были связаны с теорией и со способами расчетов. Здесь выясняются и все необходимые цифровые характеристики каждого испытуемого материала. Эта задача также создала специальную область Техники, привлекшую в помощь машине целый ряд измерительных приборов и способов измерения и изучения характеристик материала: микроскоп — для наблюдения отполированных поверхностей образцов (шлифов) с целью уяснить внешний вид отдельных составляющих металла или сплава; фотографию и пр. При Механических Лабораториях часто работают специальные Химические Лаборатории, определяющие химическим путем состав испытуемого металла или сплава. Эта область Техники очень обширна и обогащается и совершенствуется ежедневно.

Отсылая интересующихся испытательными машинами, приборами и техникой испытаний к специальным курсам (на русском языке— *Н. Н. Митинский, Строительная Механика, выпуск I, Сопротивление Материалов; В. Л. Кирпичев, Сопротивление Материалов; И. А. Калинников, Материаловедение, часть I, Испытание материалов*), дадим здесь только первоначальное понятие о машине и нормах образцов, а затем кратко перечислим некоторые важнейшие результаты производившихся до сих пор многочисленных опытов, стараясь в основу поставить те характеристики материалов, которые необходимы для расчетов.

На фиг. **34** представлена краткая схема разрывной машины Амслера (Amsler) (*Митинский, Строительная Механика, вып. I*). Образец *A* зажат концами в головках *B*. Червяк внизу, приводимый от руки, служит для первоначального изменения расстояния между головками *B B* и установки образца; гидравлический цилиндр вверху, стоящий на станине, путем подкачки масла (привод к насосу от электромотора) осуществляет нагружающую образец силу. Эта сила меняется, начинаясь с 0 и кончая любым практически возможным значением. Важно отметить, что это и есть то, что мы называем стати-

ческой нагрузкой. Она часто имеет место в машинах и сооружениях.

Испытание на сжатие осуществляется или на разрывных машинах, которые в этом случае позволяют путем постановки других зажимов нагрузить образец на сжатие, или специальными прессами, имеющими обыкновенно весьма сильную винтовую пару, нагрузка по оси которой осуществляется вращением гайки или винта. Эти же прессы позволяют вести испытание и на изгиб.

Испытание на кручение производится так, что один конец стержня зажимается накрепко, а к другому концу помощью системы зубчатых и винтовых передач передается крутящий момент от последнего зубчатого колеса, во втулке которого находится зажимная головка, держащая другой конец стержня.

Схема зажимной головки на растяжение дана на фиг. 35.

Фиг. **36—39** показывают нормальные образцы на растяжение. Если приходится почему-либо выполнять другие размеры, то для получения сравнимых результатов нужно выдерживать постоянным отношение

$$\frac{l}{\sqrt{F}} = 11{,}3, \qquad \textbf{(46)}$$

что соответствует исполняемому соотношению $l = 10d$ круглого нормального образца. Действительно, ведь нужно, чтобы уравнение Гука $H = Ee$ для всех образцов давало одни и те же цифры H и e, т.-е. чтобы:

a) два образца были равнопрочны и

b) давали одинаковое относительное удлинение.

Нетрудно видеть, что одновременно обоим этим требованиям удовлетворяют геометрически подобные образцы, при условии, если действующие на них силы пропорциональны квадратам линейных размеров. Пусть два образца, имеющие площади поперечных сечений F_1 и F_2 и длины l_1 и l_2, подобны. Исполняя указанное условие относительно их нагрузок P_1 и P_2, имеем тогда

$$P_1 = kF_1 = s\, l_1^2,$$

$$P_2 = kF_2 = s\, l_2^2,$$

откуда

$$\frac{l_1^2}{F_1} = \frac{l_2^2}{F_2}\,; \quad \text{или} \quad \frac{l_1}{\sqrt{F_1}} = \frac{l_2}{\sqrt{F_2}} = Const. \qquad \textbf{(47)}$$

Указанная зависимость называется законом подобия.

Этим законом иногда пользуются в машиностроении для нахождения размеров машины с иными заданными нагрузками по существующей хорошо исполненной машине. Но нужно очень осторожно пользоваться этим средством. Закон подобия не учитывает веса и сил инерции частей, а тем более случайных, не поддающихся

предварительному учету нагрузок; а потому лучше применять его лишь для предварительного нахождения размеров, которые затем тщательно проверять расчетом.

На фиг. **40** показана диаграмма растяжения литого железа, которая очень хорошо изображает самое явление. Она показывает, как материал работает и живет, начиная с отсутствия нагрузки и кончая разрывом. По оси абсцисс отложены абсолютные (или относительные) удлинения λ (или e), по оси ординат—нагрузки (или напряжения). Диаграмма записывается машиной автоматически. При удлинении образец получает сокращение поперечных размеров (см. § 47), вследствие чего площадь его поперечного сечения несколько уменьшается; но, при нанесении на диаграмму масштаба напряжений (машина записывает собственно нагрузки, а не напряжения), нагрузки всегда относят к первоначальной площади сечения, ибо иначе величины получались бы менее определенные.

Часть диаграммы *OA*. Точка *A* есть предел пропорциональности (см. § 6), материал следует закону Гука. *OH* — удлинение при пределе пропорциональности.

Часть *AB*. Закон Гука более не соблюдается. Между *A* и *B* есть точка *G*, в которой совершается или перегиб кривой *AB* или даже этой точкой начинается короткий горизонтальный участок кривой. Удлинения растут гораздо быстрее напряжений, почти не требуя силы для своего образования. Частицы материала уже расстроены; связь между ними ослабела; они легко сдвигаются одна относительно другой, в известной мере уподобляясь жидким частицам; материал *течет*. Точка *G* соответствует пределу текучести—той величине отношения действующей силы к первоначальной площади сечения образца, при которой наблюдается текучесть. Прежде блестящая, отшлифованная поверхность образца делается матовой; матовость увеличивается, поверхность грубеет и, наконец, на ней образуется ряд полосок, расположенных правильными рядами в две системы, пересекающиеся между собою под некоторым определенным углом и наклоненные к оси образца под углом, близким к 60°, если рассматривать в проекции. Это — линии Людерса. Их правильность, однообразие безусловно указывают на распределение напряжений, рассматриваемых в общем смысле, т.-е. во всех плоскостях, которые мысленно можно в образце провести.

Часть диаграммы *BC*. Частицы, уже смещенные, получают иную группировку и оказываются в состоянии **вновь** оказать сопротивление действующей силе. Кривая опять идет круче, напряжение повышается, но удлинения растут все-таки быстрее напряжений.

Часть диаграммы *CD* характеризуется тем, что нагрузке нужно повышаться очень немного для того, чтобы получалось большое удлинение. На образце уже наметилось слабое место и образовалось в нем утонение (шейка). Материал вновь течет.

Часть *DE*. Уменьшение сечения в шейке теперь настолько сильно, что для получения удлинения нужна уже меньшая сила,

чем прежде. Сила продолжает уменьшаться до последней точки E. В ней образец разрывается. Разрыв сопровождается сильным звуком. В момент разрыва удлинение уменьшается на величину FK.

HA — предел пропорциональности. Несколько ниже точки A, но довольно близко лежит точка a, соответствующая пределу упругости. Нахождение предела упругости производится последовательной нагрузкой образца, разгрузкой его и измерением удлинения до тех пор, пока не будет достигнуто напряжение, после которого образец, освобожденный от нагрузки, не возвращается уже больше к первоначальной длине.

Удлинение, изчезающее по снятии нагрузки, называется упругим; не исчезающее—остающимся. Полное удлинение

$$\lambda = \lambda_u + \lambda_o. \qquad (48)$$

Часть λ_u существует и за пределом упругости, так что сумма **(48)** имеет место во все время опыта.

Исчезающая часть λ_u может быть с некоторым приближением найдена помощью так называемого закона Герстнера: упругое удлинение за пределом упругости приблизительно пропорционально напряжению

$$H = \backsim E \cdot \frac{\lambda_u}{l} = Ee_u, \qquad (49)$$

т.-е. продолжением прямой OA (фиг. **40**) и снесением из любой точки P диаграммы величины напряжения можно найти удлинение RS, приблизительно равное части λ_u;

$$\left.\begin{aligned} \lambda_u &= \backsim RS, \\ \lambda_o &= \backsim SP. \end{aligned}\right\} \qquad (50)$$

Вот почему в момент разрыва возвращается упругая часть удлинения FK. FK несколько $> OH$, так как E выше A.

Так как на диаграмме абсциссы представляют полные пути прохождения точек приложения нагрузок, а ординаты—нагрузки, то площадь диаграммы $OABCDEF$ представляет собою работу, затраченную на разрыв, или так называемую работу деформации.

Затраченная машиной работа отличается на небольшую величину от работы деформации, ибо некоторая часть энергии переходит в образце в теплоту и выражается повышением температуры. Эта разница, в особенности до точки A, незначительна.

Работу деформации можно разделить на три части.

1) Работа до предела упругости $OAH = V$;

$$V = \frac{P\lambda}{2} \qquad (51)$$

(выражение годится для всех точек от 0 до A) есть упругая работа, соответствует упругой деформации и затрачивается на увеличение потенциальной энергии материала. Материал накапливает в себе эту энергию, и она возвращается материалом полностью, если нагрузка будет снята. В этих пределах материал подобен пружине, получившей деформацию и могущей всегда возвратить ее. Буквою V обозначается потенциальная энергия для всех случаев нагружений.

Величина V оказалась чрезвычайно важной и плодотворной в теоретическом смысле и служит в настоящее время могучим средством для расчетов, дающих аналитический *общий метод* для решения всевозможных систем, до самых сложных, с ничем еще не превзойденной степенью точности (см. теоремы Кастилиано, Менабреа и следующие).

2) Работа $HAMN$ расходуется главным образом на остающуюся деформацию, но, отчасти, по закону Герстнера, и на упругую деформацию.

3) Работа $NMEK$ идет на разрыв образца после образования в нем шейки. Возвращаемая упругая работа есть $FEK > OAH$; она сразу освобождается и расходуется на сотрясение всей машины и воздуха.

Вся работа деформации 1), 2) и 3)

$$L = V + L_1 + L_2. \qquad \textbf{(52)}$$

Работа деформации, приходящаяся на единицу объема деформируемого тела, считая этот объем тех размеров, где действительно деформация происходит [например, в образцах средняя часть при $d = 20$, $l = 200$, при $d = 15$, $l = 150$ и при $d = 10$, $l = 100$ (фиг. **36—38**)], называется удельной работой; если объем V_0,

$$\tau = \frac{L}{V_0}; \qquad \textbf{(53)}$$

упругая удельная работа

$$\tau_V = \frac{V}{V_0}; \qquad \textbf{(54)}$$

эта величина имеет размер $\frac{\text{kg cm}}{\text{cm}^3}$, т.-е. однородна с размером напряжения.

Подставляя из (9), λ, получим для растяжения

(9) **(51)** **(54)** $$\tau_V = \frac{H^2}{2E}, \qquad \textbf{(55)}$$

так как $V_0 = Fl$.

Величине τ можно дать геометрическое толкование, введя, по

Тимошенко, „коэффициент полноты“ $\eta < 1$ площади диаграммы, именно,

$$L = \text{площ. } OABCDEF = \eta \cdot OK \cdot MN \qquad \textbf{(56a)}$$

(геометрические величины уже умножены на свой масштаб); или, так как $MN = H_0F$ — временному сопротивлению (разрушающему напряжению, § 7), умноженному на площадь сечения, а $OK = \lambda$, то

$$L = \eta \lambda H_0 F, \qquad \textbf{(56)}$$

откуда

(53) $$\tau = \frac{\eta \lambda H_0 F}{Fl} = \eta e H_0. \qquad \textbf{(57)}$$

Таким образом, материал потребует для своего разрушения тем большей работы внешних сил, чем больше e и H_0; хотя для разных материалов и η неодинаково, но оно меняется, во всяком случае, менее резко, чем e и H_0. Свойства материала e и H_0 сопротивляются здесь совместно и помогают одно другому.

Особенно ярко сказывается это у более пластичных материалов, дающих большое удлинение,—железа, меди, мягкой стали. Поэтому характеризовать, например, железо возможно „качественным числом“

$$K = H_0 + ke^{\%}, \qquad \textbf{(58)}$$

где H_0 обыкновенно измеряется в kgcm^{-2}, а e в $^0/_0$ от первоначальной длины,

$$e^{\%} = 100 \cdot e = 100 \cdot \frac{\lambda}{l}, \qquad \textbf{(59)}$$

k — отвлеченное число, обыкновенно 2, а K есть общая числовая сумма, составляющая заданную норму. Равенство **(58)** неоднородно, размерность не соблюдена. Однако, часто, особенно для тех случаев, когда всякая неточность в качествах материала может в данной постройке создать опасность для жизни людей скорее, чем в какомлибо ином случае, обусловливают при приемке материала обе величины — и H_0 и $e^{\%}$ (например, для заклепочного железа, железа для паровых котлов и т. п.). Для материалов непластичных—чугун, твердая сталь—качественное число не имеет смысла, так как всякая затруднительность материала увеличить свое удлинение может повести к разрушению [т.-е. в равенстве **(58)** величины H_0 и $e^{\%}$ практически неравноценны]; это неоднократно и наблюдалось в материалах, уже получивших свое упругое удлинение, если нагрузка еще возрастала.

При опытах с материалами определяется еще уменьшение поперечного сечения в $^0/_0{}^0/_0$

$$\varphi = 100 \cdot \frac{F - F_1}{F}. \qquad \textbf{(60)}$$

Итак, при испытаниях материала на разрыв определяются следующие величины: H_0, $e\%$, E, H_a (предел упругости), H_A (предел пропорциональности), φ, τ_V и τ.

Диаграмма железа наиболее выразительна, так как содержит в себе весь комплекс явлений, имеющих место при растяжении. У других материалов основной характер диаграммы до некоторой степени сохраняется, но некоторые периоды или вовсе отсутствуют, или, наоборот, развиваются сильнее, чем у железа. Сталь, в особенности более твердая, не показывает текучести, так же — стальное литье; твердая (инструментальная) сталь не дает шейки. У меди и у некоторых ее сплавов очень сильно развит период CD, и получаются удлинения больше, чем у железа; а чугун—совсем не имеет точки A и прямолинейного участка, также текучести AB; из начала координат прямо исходит некоторая кривая без переломов, которая вначале не очень сильно отдаляется от прямой.

В нижеследующих таблицах представлены основные физические характеристики различных материалов.

Величины относятся к нормальной окружающей температуре $\sim 20°$ C.

$$\tau_v = \frac{H_a^2}{2E} \text{ взята при пределе упругости } H_a.$$

Если даны два числа, то они выражают пределы соответствующей физической величины; одним числом, если нет оговорок, выражено среднее ее значение. Над чертою стоят величины, относящиеся к растяжению; под нею — к сжатию.

Для дерева цифры даны при нагрузке параллельно волокнам (‖) и перпендикулярно (⊥).

В последней колонне дан коэффициент Пуассона σ (§ 47).

Для дерева при изгибе величины временного сопротивленя для H_0 меньше здесь приведенных (относящихся только к растяжению и сжатию) в среднем приблизительно на 25%. Степень влажности также, как показали опыты, имеет влияние на упругие свойства дерева, уменьшая его сопротивление по сравнению с высушенным деревом.

Образцы для растяжения дерева имеют головки, ставящиеся в зажимы машины, в виде цилиндров, диаметра раза в 4 бо́льшего, чем основная часть; к головкам вытачивается постепенное уширение.

Испытания производятся с образцами постоянного поперечного сечения как для металлов, так и для прочих материалов.

При испытаниях на сжатие необходимо брать в качестве нормальных образцов или кубики с ребром, равным 20, 30, 40, 50, 80, 100 mm (меньшие величины для металлов, бо́льшие для дерева), или квадратные призмы, обыкновенно двойной высоты по сравнению с ребром основания, или круглые цилинды высоты, равной диаметру основания или вдвое бо́льшей.

ТАБЛИЦА V.

Физические характеристики материалов.

Материал	$E\ \frac{kg}{cm^2}$	$H_0\ \frac{kg}{cm^2}$	$c\ \%$	$H_a\ \frac{kg}{cm^2}$	$\frac{H_a^2}{2E}\ \frac{kg\,cm}{cm^3}$	σ
Алюминий в отливке	660 000	950	3			0,33
Алюминий прокатный	700 000 750 000	1 400 1 500				0,33
Бетонная кладка						0,3
		75 250				
Бронза	900 000 1 050 000	2 800 3 200	6			0,35
Бронза алюминиева	1 200 000	4 200 6 200	50 до 0,5			
Бронза фосфористая	980 000	3 300 5 600		до 3 000	до 4,60	
Бук ∥	80 000	1 300		400	1,00	
Бук ∥	168 000	320		110	0,03	
Бутовая кладка на цементе						
	80 000	200				

Материал	$E\ \frac{kg}{cm^2}$	$H_0\ \frac{kg}{cm^2}$	$e\ ^0/_0$	$H_\sigma\ \frac{kg}{cm^2}$	$\frac{H_\sigma^2}{2E}\ \frac{kg\,cm}{cm^3}$	σ
Гранит		до 100				
	200 000 450 000	1 300 2 000				
Дельта - металл	1 000 000					
Дуб (влажность ∾ 15⁰/₀) ∥ ⊥	110 000 180 000	950 1 400 120		240	0,26	
∥ ⊥	103 000 180 000	340 270		150	0,11	
Ель (влажность ∾ 15⁰/₀) ∥	130 000	600		240	0,22	
∥	111 000	270		120	0,06	
Железо литое	2 150 000	3 600 4 500	20 16	2 200	1,08	0,28
		3 600 4 200		2 200		
Железо литое заклепочное	2 000 000	3 400 4 000	25			
Железо литое котельное	2 000 000	3 000 4 000	45 25			
Железо сварочное ∥	1 900 000 2 000 000	3 200 3 800 2 800	15 8	1 500	0,59	0,27
		3 400 4 000		1 500		

Материал	$E\ \frac{kg}{cm^2}$	$H_0\ \frac{kg}{cm^2}$	$e\ \%$	$H_a\ \frac{kg}{cm^2}$	$\frac{H_a^2}{2E}\ \frac{kg\,cm}{cm^3}$	σ
Золото	800 000 860 000	2 600 2 800				
Известняк камень		до 100				
	200 000 450 000	1 300 2 000				
Кирпич						
алый красный железняк		85 170 200—350				
Кирпичная кладка:						
на извести на цементе		до 105 115—125				
Латунь	1 100 000	3 200	14			0,35 0,40
		9 800		1 400		
Лиственница ∥	130 000	700		280	0,30	
∥	114 000	320		130	0,07	
Медное литье						
		до 5 200				
Медь прокатная	1 100 000	2 000 3 000	42 18			0,38 0,33
„ гальванически осажденная		4 600	80			
Мрамор						
	260 000	300 800				

Материал	E $\frac{kg}{cm^2}$	H_0 $\frac{kg}{cm^2}$	$e\,\%$	H_a $\frac{kg}{cm^2}$	$\frac{H_a^2}{2E}$ $\frac{kg\,cm}{cm^3}$	σ
Олово	420 000 460 000	140 420				
Песчаник камень		до 30				
	61 000	370 1 800				
Пихта ‖	110 000	530		230	0,24	
‖	100 000	280		110	0,06	
Платиновая проволока	1 600 000 1 700 000					
Резина	∞ 10			∞ 20	∞ 20,00	0,47
Ремень кожаный новый вытянутый	1 250 2 250	250 450		160	10,00	
Свинец	160 000 190 000	170				0,43
Серебро	740 000 780 000	2 900				
Сосна (влажность ∞ 15%) ‖ ⊥	120 000 95 000	720 120		350	0,51	
‖ ⊥	118 000 95 000	260 270		150	0,09	

Материал	$E \frac{kg}{cm^2}$	$H_0 \frac{kg}{cm^2}$	$e\,\%$	$H_a \frac{kg}{cm^2}$	$\frac{H_a^2}{2E} \frac{kg\,cm}{cm^3}$	σ
Сталь литая мягкая	2 200 000	4 200 5 500	25 20	2 500	1,42	0,29
		4 200 5 500				
Сталь литая средняя	2 250 000	5 500 6 500	12	3 500	2,72	0,29 0,33
		5 500 6 500				
Сталь литая твердая	2 300 000 2 500 000	8 000 11 000 специальная до 15 000	12 2			
Стальное литье мягкое		3 500 4 500				
Стальное литье среднее		4 500 6 000				
Стальное литье твердое		6 000 7 000				
Стальная проволока мягкая		6 500 10 000				
Стальная проволока средняя		10 000 14 000				

Материал	$E \frac{kg}{cm^2}$	$H_0 \frac{kg}{cm^2}$	$e\,\%$	$H_a \frac{kg}{cm^2}$	$\frac{H_a^2}{2E} \frac{kgcm}{cm^3}$	σ
Стальная проволока твердая		14 000 20 000				
Тесовая кладка:						
гранитная песчаниковая		600—770 600—730				
Цинк литой	480 000	до 300				
Цинк прокатный	900 000	до 1 500				0,27
Чугун белый	1 000 000	1 600				
		8 000				
Чугун серый	900 000 1 100 000	1 000 1 400				0,27 0,18 средн. 0,25
		5 000				

Вообще размер высоты ограничивается условием, чтобы деталь, подвергаемая чистому сжатию, не испытывала продольного изгиба т.-е. искривления своей оси под действием приложенных осевых сил. Если поставить в основу таблицу Ясинского (см. продольный изгиб) и считать, что напряжения, подсчитанные по чистому сжатию и по таблице Ясинского для одного и того же сжимаемого бруса, не должны разниться больше, чем на 5%, то предельные для железа величины высот h сжимаемых брусков представятся так:

сечение	круглое	$h \leqq 3d$,
„	квадратное $a \times a$	$h \leqq 7a$,
„	прямоугольное $a \times 2a$	$h \leqq 3{,}5a$,
„	шестиугольное, сторона a,	$h \leqq 5{,}5a$,
„	двутавровое железо № 8	$h \leqq 13$ cm,
„	„ „ № 40	$h \leqq 120$ cm,

что можно выразить общей формулой для всяких сечений

(17) $$h \leqq 12 \sqrt{\frac{J_{min}}{F}} = 12\, r_{min}\,, \qquad \textbf{(61)}$$

где r_{min} — наименьший радиус инерции сечения. При сжатии напряжения и деформации математически обратного знака по сравнению с растяжением. Диаграммы сжатия по характеру напоминают диаграммы растяжения, имеют аналогичные критические точки. При непластичных материалах (камень, чугун) диаграмма представляет плавную кривую.

Самое явление сжатия резко различно для металлов хрупких, мало пластичных (чугун, твердая сталь), металлов пластичных (литое железо) и дерева.

Хрупкие металлы сначала несколько сокращаются по высоте без заметных изменений поверхности; затем начинают появляться трещины, начинается разрушение; оно идет в плоскостях, составляющих угол $\backsim 45°$ с направлением сжимающей нагрузки, и кубик выкрашивается с боков, превратившись в две четырехгранные усеченные пирамиды, соткнутые малыми основаниями (табл. 15, фиг. 226). Если сжимался цилиндрик, то он разрушается по направлению наклонной плоскости с углом 45° к оси (фиг. **41**—**42**).

Цилиндрик из литого железа превращается в круглую, совершенно правильной формы лепешку незначительной высоты: никаких разрывов материала с краев обыкновенно не происходит; трещин нет. Образующая полученной лепешки не прямая, а выпуклая кривая, т.-е. средний, перпендикулярный к направлению нагрузки, круг несколько больше кругов в основаниях. Это объясняется тем, что боковую деформацию (определяемую коэффициентом Пуассона, § 47) у оснований задерживают сами нажимы машины; если бы можно было избавиться от сил трения, препятствующих основаниям расширяться, после деформации получился бы точный цилиндр малой высоты.

Деревянные кубики по неоднородности строения не дают при своем разрушении угла 45°. При нагружении на сжатие параллельно волокнам дерево расслаивается, волокна отделяются одно от другого и переламываются (фиг. **43**).

На все определяемые величины сильно влияет состояние здоровья дерева.

Как при сжатии, так и при растяжении форма поперечного сечения несколько влияет на величину разрушающего напряжения (это относится и ко всем прочим способам нагружения) (*Bach, Elasticität & Festigkeit*). Чем сложнее форма, тем несколько больше

отхождение величин от основных, полученных на нормальных образцах, в сторону уменьшения этих величин.

Изгиб также дает свою диаграмму, напоминающую диаграммы сжатия и растяжения; по оси абсцисс откладываются прогибы.

Указанная выше таблица предполагает, что нагружение материала совершается в первый раз (за исключением оговоренного случая ремня). Повторные нагружения изменяют несколько, для пластичных материалов (железо, мягкая сталь) критические точки диаграммы. Знать **влияние повторных нагружений** чрезвычайно важно, ибо случаи действия постоянной нагрузки очень редки: каждое сооружение и каждая машина, вообще говоря, подвергаются всегда действию переменных нагрузок. Как будет сказано ниже, в соответствии с этим выбираются и допускаемые напряжения, причем здесь различают, кроме постоянной нагрузки $P = Const$, два случая: **нагрузку** 0, P, т.-е. нагрузка P прикладывается, снимается, опять прикладывается и т. д. бесчисленное количество раз; и **нагрузку** $-P$, 0, P, т.-е. она при этом еще периодически меняет свое направление. Снимание нагрузки и новое нагружение происходит в машинах чрезвычайно разнообразно и в различные промежутки времени, смотря по роду машины, по числу ее оборотов и т. п. Иногда происходит постепенное изменение действующих в машине нагрузок, т.-е. периодическое увеличение их и уменьшение до 0 или до какой-угодно другой возможной положительной или отрицательной величины; иногда же эти изменения внезапны, т.-е. происходят с ударом. Ударное и однородное с ним динамическое действие нагрузки рассматривается особо. Однако, все-таки величины напряжений и в этом случае выбираются в зависимости от приведенной выше основной таблицы физических постоянных материала, полученных для постоянной нагрузки.

Таким образом, на таблицу H_0 нужно смотреть, как на перечень максимальных возможных для материала величин, которые он может дать при наивыгодных для себя условиях.

Влияние повторений нагрузки получило ясность после опытов Герстнера и Велера (Wöhler).

Диаграмма опытов Герстнера дана на фиг. **44**. Если брус, растянутый до точки A, разгрузить, то будет вычерчиваться линия AB, очень близкая к прямой (что и выражает закон Герстнера: возвращается упругое удлинение); остающееся удлинение — OB. Если теперь тотчас же нагружать материал вновь, то уже самые незначительные нагрузки вызывают остающиеся удлинения: при увеличении времени, даже без увеличения нагрузки, удлинение увеличивается. Но если брусу дать отдохнуть месяц или два и вновь нагрузить, то оказывается, что упругие свойства вновь возвратились материалу — он опять следует закону Гука, и при этом предел пропорциональности оказывается значительно увеличенным: он не меньше того напряжения, до которого материал был доведен при первом опыте — прямая BC. Частицам материала нужно время для приведения

себя в порядок. Опыт можно повторять несколько раз, и окажется, что предел пропорциональности будет понемногу возрастать, хотя остающееся удлинение и получено уже с первого раза. Так ведет себя материал, если нагрузка прикладывается некоторое небольшое число раз и если ему дают отдохнуть.

Велер прикладывал нагрузку (при помощи кривошипного механизма, приводимого в движение извне) чрезвычайно большое число раз (порядка 5 до 15 миллионов); им найдены следующие результаты, которые принято называть законами Велера: 1) пластичные материалы разрушаются напряжениями, меньшими временного сопротивления, полученного обыкновенным испытанием, если напряжения изменяются большое число раз; 2) число этих перемен зависит от величины максимального напряжения и от величины разности напряжений, причем чем больше та и другая величины, тем меньшее число перемен нужно для разрушения; 3) можно найти такую разность напряжений, при которой материал не разрушится при сколь-угодно большом числе перемен; 4) эта разность (амплитуда) должна быть тем меньше, чем больше наибольшее напряжение.

Явления, изученные Герстнером и Велером, отчасти родственны, и второе продолжает первое.

Если изучить под микроскопом структуру образца до повторных нагружений и после большого их числа, то окажется, что мелкозернистая пластичная структура переходит после этих нагружений в крупнозернистую, хрупкую. Нагружения Герстнера с отдыхами действуют подобно закалке — материал делается тверже и крепче, но и более хрупким; это тем более справедливо, что отжигом можно в значительной мере восстановить первоначальные свойства материала после опытов Герстнера. Нагружения Велера делают материал тоже более хрупким и кристаллическим; материал постепенно перерождается, как бы приобретает старость. Это свойство материала называется усталостью. Очень важно отметить, что усталость материала никак нельзя обнаружить при обыкновенных испытаниях на растяжение и сжатие, так как временное сопротивление при этом получится обыкновенной величины. Повторные же нагрузки доводят материал до разрушения при меньших численно напряжениях.

Модуль упругости 2-го рода G может быть получен из испытания на кручение. При однородном материале его величина может быть определена по формуле (184). Для волокнистых материалов (184) оправдывается лишь приблизительно (дерево), G получается меньше, чем по (184), в особенности, если сдвигающая сила параллельна волокнам.

Дерево имеет неодинаковое сопротивление волокон сердцевины и периферии. Сердцевина выдерживает усилия меньшие, чем периферия. Если обозначить временное сопротивление сердцевины H_i, а периферии H_e, то отношение

$$\alpha = \frac{H_i}{H_e} \tag{62}$$

для разных видов дерева можно приблизительно выразить таблицей:

бук	$\alpha = \infty \frac{1}{3}$,	лиственница . .	$\alpha = \infty \frac{1}{2,5}$,
дуб	0,8,	пихта	$\frac{1}{2}$,
ель	0,6,	сосна	$\frac{1}{3}$.

В основной таблице физических постоянных (табл. V) приведены для дерева средние временные сопротивления, подсчитанные на основании испытания образцов из сердцевины и периферии.

Гл. III, § 12.

Моменты инерции главнейших фигур показаны на фиг. **45—93**.

Гл. V, § 15.

В теории I части изложены все случаи нагружений, позволяющие вычислить напряжение и деформацию с большой степенью точности, если только физическая характеристика данного материала известна. Здесь приведем еще некоторые примеры нагружений, не допускающих такого точного теоретического решения (методами Сопротивления Материалов), в порядке ограничения 3 § 6; в основу ставятся данные, полученные из опыта.

Смятие есть деформация, родственная сжатию, но происходящая не на всей высоте детали или образца, а на некоторой ограниченной части этой высоты, ближайшей к поверхности нагружения. Смысл расчетных уравнений на сжатие не остается в силе для смятия; точно так же—деформации смятия не могут быть подсчитаны по формулам деформаций сжатия. Однако, размеры сминаемых стыков деталей должны быть правильно рассчитаны, так как если эти размеры выполнить недостаточными, то произойдет целый ряд ненормальностей в работе сооружения или машины: чрезмерное смятие катками в подвижной опоре моста опорной подушки, по которой сдвигаются эти катки, поведет к тому, что они потребуют для своего качения разных моментов катящегося трения, в зависимости от своего места на подушке; если подушка будет безусловно жесткой, то могут утратить свою круглоту катки; перегруженный на смятие подшипник в машине будет срабатываться неправильно и начнет греться, при недосмотре может расплавиться; перегруженная шейка коленчатого вала делается овальной и начинает греться (часты случаи в автомобилях), почему вал приходится часто пришлифовывать на шлифовальном станке; узкая стальная тормозная лента в кране может сминать заклепки [формула **(11)**]; грунт, на котором устанавливается фундамент колонны здания, даст осадку больше, чем возможно,—балки, опирающиеся на эту колонну, у которых некоторые опоры опустятся, полу-

чат дополнительные напряжения; неправильная осадка грунта под стеной даст трещину в стене и т. п.

Расчетным уравнением на смятие всегда придается вид

$$K \geqq \frac{P}{F}, \qquad (63)$$

где K — напряжение смятия в $kgcm^{-2}$, P — нагрузка в kg, F — площадь стыка, если он плоский, или *площадь проекции* его поверхности на плоскость, перпендикулярную к направлению силы P, выраженная в cm.

ТАБЛИЦА VI.

Значения допускаемого напряжения смятия K_∂ для некоторых материалов.

	K_∂ $kgcm^{-2}$
Бетон	10 — 18
Бутовая кладка	10 — 12
Гранит	30 — 45
Грунт плотный утрамбованный	1 — 3
Железо литое	1000 — 1500
„ сварочное	800 — 1200
Заклепочные соединения	2000
Известняк камень	20 — 25
Кирпичная кладка на известковом растворе	5 — 8
Кирпичная кладка на цементном растворе	10 — 12
Мрамор	5 — 10
Сталь литая	1200 — 1500
Стальное литье	800 — 1500
Чугун	400 — 900

Во всех случаях расчет или поверка ведутся по слабому материалу стыка.

Здесь приведены величины для неподвижных стыков. Очень часто назначаются или проверяются величины K_∂ для стыков, имеющих движение. Умелый выбор этих напряжений имеет большое значение в Деталях Машин. Например, для шипов, осей и валов K_∂ выбирается $\backsim$ в пределах 25 — 150 $kgcm^{-2}$. Однако, конструировать размеры движущихся стыков по одному K_∂ затруднительно. Трущийся стык изнашивается и нагревается. Исполнить его так, чтобы он не был излишне велик и в то же время рационально изнаши-

вался и нагревался не более как настолько, чтобы это приобретаемое тепло успевало уходить в окружающую среду, и есть основная задача конструктора. **Изнашивание и нагревание** находится в прямой пропорциональности с величинами действующих сил, т.-е. с K, и со скоростью относительного движения деталей, v; следовательно, оно пропорционально произведению этих величин, Kv. Поэтому расчетной величиной является допускаемое Kv_∂, в котором K в $kgcm^{-2}$, а v есть *средняя относительная* скорость движения деталей в $msec^{-1}$.

Некоторые величины Kv_∂ представлены в табл. VII.

ТАБЛИЦА VII.

Значения величин Kv_∂.

	$Kv_\partial\left(\frac{kgm}{cm^2\ sec}\right)$
Станки (машины-орудия)	2 — 10
Трансмиссии	12 — 20
Вагонные оси	40
Паровозные оси	78
Шейки паровозных валов	до 130
„ валов дизелей	до 50
„ „ авиационных двигателей	до 175
Гребенчатые подшипники	10 — 40

Хотя Kv несомненно пропорционально той секундной работе трения, которая имеет место на стыке деталей, а также теплу, выделяемому на каждом cm^2 стыка, однако эта величина сама по себе все же еще не является гарантией, что при проектируемых силах и размерах стык греться не будет. В Kv не входит коэффициент f трения стыка, а он зависит от материала, тщательности обработки поверхности, смазки и относительной скорости стыка. Вследствие этого конструктор, учитывая помощью Kv силы и скорости, должен назначать эту величину, сообразуясь также со всеми не вошедшими сюда факторами и, в первую очередь, со смазкой.

Более полной величиной было бы Kvf. Эта величина была бы более устойчива и давала бы более определенный выбор.

Выражение Kv для подшипника или шипа длины l по нагрузке P и числу оборотов n получается, после подстановки

$$v = \frac{\pi d n}{60}, \qquad (64)$$

$$K = \frac{P}{ld}, \qquad (65)$$

(64) (65) $$Kv = \frac{P}{ld^{cm}} \cdot \frac{\pi d n^m}{60} = \frac{P}{ld^{cm}} \cdot \frac{\pi n}{60} \cdot \frac{d^{cm}}{100} = \frac{Pn}{1910 l}. \quad (66)$$

Также для подпятника, опирающегося полным кругом $\frac{\pi d^2}{4}$,

$$K = \frac{4P}{\pi d^2} = 1{,}27 \frac{P}{d^2}, \quad (67)$$

$$V = \infty \pi \frac{d}{2} n \cdot \frac{1}{60};$$

(67) $$Kv = \frac{Pn}{3000 d}; \quad (68)$$

для опирающегося кольцом $\frac{\pi}{4}(d^2 - d_1^2)$

$$K = \frac{4P}{\pi (d^2 - d_1^2)} \quad (69)$$

$$v = \infty \frac{\pi (d + d_1) n}{2 \cdot 60};$$

$$Kv = \frac{Pn}{3000 (d - d_1)}. \quad (70)$$

Существуют и другие расчетные способы для изнашивания и нагревания. Так, в зубчатых и червячных передачах образуют отношение

$$C = \frac{P}{bt} \quad (71)$$

окружного усилия колеса на произведение длины зубца на шаг колеса, и подчиняют C установленным из опыта нормам в зависимости от окружной скорости и смазки. Подобным образом рассчитываются и все прочие случаи изнашивания и нагревания. При нахождении средней относительной скорости v составляют или аналитическое ее выражение, или, если она выражается очень сложно, строят графически все скорости за период в зависимости от длины или угла и, в случае постоянной силы P, находят среднюю скорость планиметрированием диаграммы. В случае, если и P переменно, точное выражение Kv есть, после нахождения уравнения $f(K, v) = 0$,

$$Kv = \int_1^2 K dv; \quad (72)$$

но, вообще говоря, достаточно брать P тоже среднее.

Временное сопротивление среза T_0 может быть получено специальными испытаниями, но обыкновенно его определяют из основной таблицы физических постоянных на растяжение и сжатие, руководясь общими теоретическими соотношениями напряжений H и T (см. гл. XVIII). По 2-й теории прочности можно считать, что

$$T \text{ равноопасно } \infty\ 0{,}8 H, \quad (73)$$

а по 3-й точно

$$T \text{ равноопасно } 0{,}5 H \quad (74)$$

Соответственно этому выбираются и допускаемые напряжения на срез. 3-я теория, как показывает непосредственный опыт, справедливее 2-й. Причиной разрушений являются, повидимому, тангенциальные напряжения, а не нормальные (см. § 51). Поэтому правильнее было бы производить испытание материалов не на растяжение, а на сдвиг.

Но, поскольку для материалов, достаточно однородных по всем направлениям, существует вполне определенная зависимость между напряжениями H и T, испытания на растяжение также дают все, что нужно, и только для материалов неоднородных (дерево) необходимо вносить коррективы, что могут показать табл. VIII и IX (*Th. Gesteschi, Hölzerne Dachkonstruktionen*).

ТАБЛИЦА VIII.

Средние величины временного сопротивления в $kgcm^{-2}$ доброкачественного, несучковатого высушенного на воздухе леса.

Порода	Растяжение	Сжатие	Изгиб	Сдвиг	
				ǁ	⊥
Бук	700 — 1100	384 — 420	650	85	290
Дуб	700 — 1000	350 — 450	620	75	270
Ель	600 — 750	280 — 440	560	67	219
Лиственница .	710 — 960	330 — 500	600	72	247
Пихта	550 — 800	280 — 350	600	63	273
Сосна	720 — 790	230 — 302	500	61	210

ТАБЛИЦА IX.

Средние величины временного сопротивления в $kgcm^{-2}$ высушенных на воздухе хвойных деревьев и дуба.

Род напряжения		Хвойные	Дуб
H_0 растяжения	ǁ	730	920
„ „	⊥	125	150
„ сжатия	ǁ	330	400
„ „	⊥	40 — 70	120 — 150
„ изгиба	ǁ	550	620
T_0 сдвига	ǁ	65	75
„ „	⊥	230	270

Безопасный предел упругости для дерева

$$H_{a\ растяжения} = 0{,}6 H_{0\ растяжения}, \qquad (75)$$

$$H_{a\ сжатия} = 0{,}4 H_{0\ сжатия}, \qquad (76)$$

$$H_{a\ изгиба} = 0{,}5 H_{0\ изгиба}. \qquad (77)$$

Излом образцов при кручении показан на фиг. **94—95** для металлических образцов. В случае хрупких металлов (твердая сталь, чугун) излом происходит (при однородном материале) под углом 45° к плоскости внешней приложенной пары (фиг. **94**). В случае тягучих, вязких металлов происходит явление, подобное срезыванию: плоскость излома параллельна плоскости действия внешней пары. Фиг. **95** представляет промежуточный случай материала средней вязкости.

Гл. VI, § 25.

Для облегчения решения графоаналитическим способом полезно помнить совместно фиг. **96—99**, представляющие последовательно площади, ограниченные горизонтальной прямой, наклонной прямой, квадратной и кубической параболами с вершиной в пределах чертежа, и их координаты $\bar{x}$ центров тяжести. При постепенном усложнении уравнения $y = au^n$ подстановками $n = 0$, $n = 1$, $n = 2$ и т. д. площади и координаты выражаются последовательно ml, $\frac{ml}{2}$, $\frac{ml}{3}$; $\frac{l}{2}$, $\frac{l}{3}$, $\frac{l}{4}$ и т. д., строго закономерно. Фиг. **100** дает координаты центра тяжести полупараболы. Фиг. **101** позволяет разыскивать центры тяжести частей площади квадратной параболы F_x или F_u. Центры тяжести площадей F_x прочитываются на кривой $\bar{x}$, а центры тяжести площадей F_u—на кривой $\bar{u}$ под той ординатой, которая ограничивает искомую площадь; тем же способом на кривых F_x и F_u прочитываются величины площадей в $^0/_0$ от площади описанного около параболы прямоугольника с основанием *c*. Диаграмма предназначается для быстрого нахождения деформаций в определенных точках, по преимуществу прямо в числовом виде. Для нахождения уравнения упругой линии диаграмма не предназначается.

Гл. VIII, § 30.

Фиг. **102** дает простой способ построения по точкам квадратной параболы (точка *4*) и кубической параболы (точка *6*). Точка *1* на диагонали прямоугольника произвольна. Порядок построения указан цифрами.

Гл. IX и X.

Для иллюстрации общей теории балок и также для справок даны простейшие балки на фиг. **103—134**. Первая строчка под чертежом дает уравнения сгибающих моментов M и величины сгибающих моментов в некоторых определенных точках; вторая—уравнения

и отдельные значения поперечных сил Q; третья—уравнения упругой линии y и отдельные прогибы; четвертая—уравнения углов упругой линии θ и отдельные их значения. На фигурах вверху дана эпюра моментов, внизу—эпюра поперечной силы; на самой балке нанесен вид упругой линии. Теория балок была изложена в общем виде, без отношения к виду нагрузки; здесь, наоборот, для удобства сравнения, взятые примеры подобраны по нагрузкам: прежде показаны нагрузки чистыми парами, затем сосредоточенными силами, затем равномерная сплошная нагрузка, наконец,—треугольная.

Левая опора балки обозначена A, правая B. C—обозначает или среднюю точку пролета, или вообще некоторую промежуточную точку пролета балки между A и B, или среднюю опору.

Участки балок перенумерованы, начиная слева, 1, 2, 3,....

Уравнения моментов, поперечных сил, уравнения упругой линии и уравнения углов (тангенсов углов касательной к упругой линии с осью x) написаны с соблюдением знаков, соответственно принимаемым осям координат; отдельные же значения всех этих величин (за исключением прогибов) показаны своими абсолютными величинами, без знака.

Приведенные здесь балки являются классическим, типичным примером балок, по которому хорошо можно изучить свойства балок вообще. Произвести исследование каждой из них для подробного уяснения свойств типичных представителей балок тем более интересно, что все перечисленные балки часто встречаются в технической деятельности. Здесь даны только окончательные результаты, которыми можно пользоваться для быстрых подсчетов. Многие из приведенных здесь величин конструктор должен помнить наизусть.

Гл. XII, § 40.

Брус переменного сечения возник как следствие основного конструктивного принципа: идеальной в смысле использования материала является та конструкция, все материальные точки которой имеют одинаковое напряжение. Тогда все точки материала работают одинаково сильно, т.-е. наивыгоднейшим образом. Этому принципу не удовлетворяют брусья, испытывающие кручение и изгиб. При кручении работает главным образом периферия. Например, в круглом сечении диаметра d внутренний круг диаметра $\frac{d}{2}$ передает только $6^1/_4\%$ всего крутящего момента. Из всех существующих балок только одна (фиг. **103**) нагружена по всей длине постоянным сгибающим моментом: это значит, что во всех сечениях этой балки наружные точки, наиболее удаленные от нейтральной оси, по уравнению $H=\frac{M}{W}$, имеют одинаковое напряжение. В точках, ближайших к нейтральной оси, напряжение меньше, т.-е. эти точки работают невыгодно. Во многих балках эпюра моментов пересекает ось, в этих сечениях $M=0$, а значит и $H=0$, т.-е. даже и наружные точки

сечения не работают. В балке постоянного сечения оно осуществляется таким только из-за максимального момента. Остальные сечения могут быть меньше, *если нет специальных оговорок относительно прогиба* (так как балка постоянного сечения, взятого по наибольшему моменту, имеет прогиб меньше, чем балка с уменьшенными прочими сечениями). Длинные шахтные канаты, работающие даже на самую выгодную нагрузку—растяжение, утолщаются кверху из-за собственного веса. Высказанный выше принцип можно развить так: если нельзя выполнить конструкцию таким образом, чтобы она во всех точках имела одинаковое напряжение, то нужно, по крайней мере, стараться сделать у нее несколько равноопасных сечений, если при этом деформации не будут превосходить обусловленной величины.

Во многих случаях переменное сечение получается также по самому смыслу конструкции (см. часть I). Принцип переменного сечения нередко бывает выполнен в составных балках — клепанных, срощенных, в рессорах — получающих увеличенное сечение в месте опасного момента или даже равнопрочных в нескольких сечениях. Здесь рассматриваются пока только цельные, несоставные сечения.

Рассмотрим, по какой кривой нужно было бы менять высоту сечения простой двухопорной балки с сосредоточенной силой в средине (фиг. **110**), если ширина сечения балки остается постоянной, для того, чтобы нормальные напряжения балки во всех ее сечениях были одинаковы. Так как $M = \frac{P}{2}x$ и $W = \frac{by^2}{6}$ (y — высота сечения), то кривая выражается уравнением $H = \frac{p}{2}x : \frac{by^2}{6}$, или $y^2 = \frac{3px}{Hb}$. Фасад балки должен представлять собою две соткнутые в среднем сечении балки квадратные параболы с вершинами на опорах и с осью, совпадающей с осью балки.

Очевидно, выигрыш в весе по сравнению с балкой постоянного сечения получился бы $33^1/_3\%$.

Подобным образом можно найти кривые фасады и для других случаев.

Однако, соблюдать лишь нормальные напряжения неправильно. Правильное решение вопроса было бы, если бы удалось сделать сложное максимальное напряжение одинаковым во всех сечениях балки. Более совершенное решение: определяются отдельно фасады балки по нормальным и тангенциальным напряжениям, фасады совмещаются и балка очерчивается по наружным линиям обоих фасадов (с поправками на местные напряжения, с плавными переходами). Кроме этого, как правило, должен проверяться максимальный прогиб, чтобы он также не превзошел допускаемого прогиба (см. § 41).

О переменном брусе, получившемся в результате ослаблений отверстиями, было сказано в начале части II.

На фиг. **135** представлен брус переменного сечения на растяжение, в котором P представляет равнодействующую растягивающих сил (*Тимошенко, Курс Сопр. Мат.*). Напряжения в сечении mn распре-

деляются неравномерно в зависимости от угла γ (что можно наблюдать, изучая деформации такого бруса, сделанного из резины). Наибольшие напряжения возникают по оси бруса, наименьшие у краев. При $\gamma = 10^\circ$ разница между наибольшим и средним напряжениями в сечениях, перпендикулярных AB, не превосходит 1,3%. При $\gamma = 30^\circ$ эта разница составляет уже 13%. Следовательно, при проектировании переменного бруса нужно избегать больших углов перехода, ибо тогда наблюдается уже некоторое отхождение действительных результатов нагружения с полученными расчетом.

Точно так же нужно все время считаться с возможностью местных напряжений, избегать резких изменений сечения, делать плавные переходы от тонких частей к толстым, и наоборот.

Бах брал обыкновенный цилиндрический образец из сварочного железа $d = 15$ mm и параллельно с ним испытывал на растяжение следующие бруски переменного сечения: у них всех наружный диаметр был 25 mm; но один (a) имел выточку под прямыми углами без закруглений длины 25 и диаметра 15, другой (b)—выточку с выкружками радиуса 5 (плавный переход сечения), диаметра 15 и длины 15 и (c)—такую же выточку длины 10. Временные сопротивления получились следующие (единицы округлены): цилиндрический образец 4250, a—4420, b—5020, c—5890 kgcm^{-2}, хотя опасное поперечное сечение было у всех одно—диаметра 15 mm. Итак, даже резко ослабленный брус a дал $H_0 >$ нормального. Такое явление наблюдается только у пластичных материалов и объясняется тем, что в выточке, благодаря близко примыкающим к ней толстым частям образца, сильно затрудняется образование шейки, необходимой для разрыва. Поэтому именно c менее опасен чем b, так как у первого длина выточки меньше. Это влияние утолщений вблизи тонкого места оказывается в пластичных материалах гораздо сильнее даже, чем влияние неравномерного распределения напряжений в ослабленном тонком сечении. При ~~хрупких~~ материалах, у которых при разрыве шейка или совсем отсутствует или слабо выражена, наблюдается как раз обратное явление—неравномерность распределения напряжений решает. Поэтому у хрупких материалов нужно в особенности быть осторожным с быстрыми изменениями сечения.

Нужно еще иметь в виду, что и у пластичных материалов этот кажущийся парадокс—большего временного сопротивления ослабленного сечения—относится именно лишь к временному сопротивлению, т.-е. наблюдается за пределами пропорциональности. Поэтому, ввиду общего неравномерного распределения напряжений в ослаблении, вообще нельзя ручаться, что запас прочности $m = \frac{H_0}{H_d}$ в этом сечении одинаков с другими сечениями или больше их.

Утонение сечений при растяжении играет большую роль при динамической растягивающей нагрузке: более тонкие части стремятся в первую очередь поглощать работу удара. Этим свойством иногда пользуются при конструировании крышечных болтов головок ша-

туна у больших паровых машин и двигателей внутреннего сгорания. Опасаясь, чтобы при быстром нарастании нагрузки не произошел обрыв болта в месте нарезки, делают выточки в круглой части болта, равные по диаметру внутреннему диаметру нарезки или чуть больше его, тогда работа удара не сосредоточивается в нарезке, а быстрее течет по всему болту.

Резкие уменьшения поперечного сечения сильно уменьшают сопротивление брусьев при повторных нагрузках.

Чрезвычайно опасны кольцевые выточки (даже круглого очертания) у скручиваемых брусков—валов. Так же совершенно неравномерно распределяются напряжения в переходах валов по типу фиг. 199 на табл. 13. Феппль (Föppl) считает, что действительное напряжение в таком переходе близко к тому, которое было бы у трубчатого (полого) вала, имеющего наружный диаметр, равный *малому* диаметру перехода d и внутренний, равный $d - 3\varrho$, где ϱ — радиус выкружки, т.-е.

$$T = \frac{M_к}{0{,}2\, d^3\,(1 - c^4)}, \qquad (45)$$

где

(36) $$c = 1 - 3\frac{\varrho}{d}. \qquad \textbf{(78)}$$

Виллерс (Willers) же считает, что при малых выкружках, в случае перехода (фиг. 199, табл. 13), это напряжение равно 1,75 напряжения сплошного вала *малого* диаметра d, т.-е.

$$T = 1{,}75\frac{M_к}{0{,}2\, d^3} = 8{,}75\frac{M_к}{d^3}; \qquad \textbf{(79)}$$

а в случае кольцевой выточки полукруглого контура оно вдвое больше напряжения вала:

$$T = 2\frac{M_к}{0{,}2\, d^3} = 10\frac{M_к}{d^3}. \qquad \textbf{(80)}$$

Шпонки на валу дают в углах теоретическое напряжение, равное ∞ (при идеальном прямом угле), поэтому желательно делать шпонки и шпоночные дорожки на валу с ничтожными закруглениями в углах, во избежание чрезмерных перенапряжений. Во многих случаях точки вала в местах ослабления шпоночными дорожками работают за пределами закона Гука, отдельные районы получают остающиеся деформации, в то время как сам вал рассчитан внутри закона Гука, и цельные его сечения работают с запасом внутри предела пропорциональности. Но пластичный материал в известной мере приспособляется к нагрузке, дав в нескольких точках остающиеся деформации.

Все сказанное объясняет, почему в валах необходимо проектировать довольно большой запас прочности. К этому приводит также и то обстоятельство, что никогда нельзя поручиться за постоянство крутящего момента. Несмотря на ряд устройств, применяемых для выравнивания по времени крутящего момента (регулирование, маховики), его непостоянство зависит от многих причин; и не только в поршневых машинах, работающих с кривошипным механизмом, но даже и в ротационных машинах (турбины), момент на валу меняется, так как меняется сама нагрузка машины. Поэтому, как правило, вал рассчитывается по наибольшему моменту; причем должны быть возможно точно учтены силы инерции соединенных с валом масс.

К понижению напряжения в вале приводит и требование допустимости получаемых валом деформаций.

Допускаемое напряжение для валов из самой лучшей литой мягкой стали не назначается для средних и крупных машин выше $H_{\partial} = 650 - 700$ kgcm^{-2} (сложное сопротивление).

Стодола (*A. Stodola, Dampfturbinen*) считает возможным в валах паровых турбин максимальное $T_{\partial} = \backsim 400$ kgcm^{-2} (3-я теория прочности) [1].

Несколько высшие напряжения встречаются в авто- и авиостроении.

В трансмиссиях валы нагружают обыкновенно не выше $H_{\partial} = 500$ kgcm^{-2} (сложное сопротивление).

На фиг. **136—138** показан образец чугунной балки, имевшей узкие отверстия продолговатой формы в месте нейтральной оси. На образцах такого вида Пфлейдерер (Pfleiderer) изучал влияние на прочность балки тангенциальных напряжений.

Ширина прореза у всех балок оставалась постоянной и равной 30 mm, а длина прореза l_1 бралась различная, от 30 (круглое отверстие в нейтральном слое) до 240 mm. В среднем вертикальном сечении прореза не было. Одна серия балок имела гладкую вертикальную стенку, у другой серии отверстие было окаймлено утолщением стенки (фиг. **138**). Для сравнения с ними испытывалась чистая балка, без прорезов. Если назвать разрушающий груз этой балки 100%, то разрушающие грузы остальных выражались так:

первая	серия,	при	$l_1 = 30$	груз	96%,
„	„	„	60	„	85%,
„	„	„	120	„	70%,
„	„	„	240	„	34%,
вторая	„	„	$l_1 = 116$	„	100%,
„	„	„	240	„	52%.

Нормальная балка сломалась в средине. Из остальных в средине сломалась только первая из второй серии, все прочие разрушились в местах прорезов. У всех них имеется по две трещины, выходящие из краев отверстия, под углом $\backsim 60^{\circ}$ к оси.

Этот опыт указывает, что балка отверстием даже в нейтральном

[1]) Для литой стали.

слое, где $H = \sim 0$, ослабляется в большой степени и тем больше, чем длиннее отверстие. Это и есть влияние тангенциальных напряжений. Окаймление отверстия сильно повышает сопротивление балки.

Гл. XIV, § 43.

На фиг. **139** дан внешний вид закрученного квадратного бруса. Проведенные на нем деления дают понятие об испытании на кручение и об изучении деформаций (угловые квадраты не деформированы, поперечное сечение—не плоскость).

Фиг. **140—145** показывают некоторые из поперечных сечений, исследованных на кручение Бахом (*Bach, Elasticität & Festigkeit*).

Гл. XVI, § 46.

При построении полного напряжения точки, требуется проводить касательные к эллипсу напряжений или параллельно данному диаметру эллипса (задача 1), или же через определенную точку эллипса (задача 2). Для облегчения второго построения на фиг. **146** указано, попутно с построением самого эллипса по полуосям a и b, построение нормали эллипса MN в произвольной точке 3.

Гл. XIX, § 54.

Здесь даются дополнения к расчету вала, касающиеся определения нагрузок на вал. Бывают заданы или выбираются: число оборотов n вала и мощности отдельных шкивов. Крутящие моменты определяются по формуле (51). Далее, одновременно выбирают диаметры шкивов (что равносильно выбору окружной скорости $v = \frac{\pi D n}{60}$, которая в чугунном шкиве не может быть больше 35 m sec^{-1} из условия прочности на центробежную силу вращающегося шкива) и ширину их

$$B = 1{,}1\, b + (0{,}5 - 1{,}0) \text{ cm} \qquad \textbf{(81)}$$

по ширине ремня b, подсчитанной по правилам Деталей Машин. Если шкив канатный, то по правилам Деталей Машин рассчитываются канаты, определяется их число, и по нему B. Выбор диаметра D и ширины шкива B ограничен необходимым условием, чтобы было

$$\frac{D}{B} \text{ не больше } 8 - 10 \qquad \textbf{(82)}$$

для устойчивой работы, во избежание перекашивания и биения шкива на валу.

Зная D и B каждого шкива, находят по нормалям или заводским каталогам веса шкивов.

Окружное усилие каждого шкива равно

$$P = \frac{M_к}{R} = \frac{2M_к}{D}, \qquad \textbf{(83)}$$

где $M_к$ — крутящий момент, передаваемый этим шкивом. Натяжение ремней или канатов создают на валу сверх веса шкивов нагрузки, которые считаются направленными по прямой, соединяющей центры шкивов каждой отдельной передачи. При угле обхвата ремней или канатов $\backsim 180°$ ведущий конец ремня (или канатов) натянут силой, приблизительно равной $2P$, а ведомый — около P; иногда та и другая величины могут быть несколько больше. Итак, общая теоретическая величина силы на вал, передаваемой от двух концов гибкого тела передачи $\backsim 3P$. Но так как ремень при надевании на шкивы растягивается специальными станками, с целью вызвать его удлинение и тем самым заставить его сильнее прижаться к шкивам, то эта деформация, трудно учитываемая теоретически вследствие неоднородности ремня, затруднительности учета кривой, по которой он будет провисать в движении (эта кривая обусловливается действующими силами по ремню, его собственным весом, силами инерции и давлением воздуха), создает некоторую дополнительную силу. Поэтому вал при ременной передаче рассчитывается на силу $5P$.

Канаты, применяемые обыкновенно при больших расстояниях между шкивами, сильно провисают, впитывают в себя влагу и делаются тяжелее, поэтому и в канатной передаче вал считается также по увеличенной силе $5P$ или даже $6P$, где P есть, как и при ремне, окружное усилие каждого шкива.

Моменты при пуске в ход и при остановке, получаемые от сил инерции масс вала и деталей, учитываются особо.

Сложные допускаемые напряження вала указаны выше.

Гл. XX, § 57.

По своей природе напряжения могут быть только двух видов— нормальные H и тангенциальные (касательные, скалывающие) напряжения T. Однако, при различии самих нагрузок—растяжение, сжатие, изгиб, кручение, срез — физические постоянные получаются для каждого материала и случая нагрузки несколько отличающимися, и тем больше, чем менее однороден материал. Даже и при совершенно однородном материале у одноименных напряжений может быть принципиальное различие: так, напряжения H простого растяжения и H изгиба, вообще говоря, не идентичны: в тех поперечных плоскостях, где имеется H чистого растяжения, оно действует только одно; в поперечных же плоскостях при изгибе, за исключением наружных точек сечения, действуют, кроме H, и напряжения T. А так как причиной разрушения является, повидимому, весь комплекс напряжений, т.-е. вообще *сложное напряжение* в каждом отдельном случае, то и при совершенно однородном материале возможно ожидать некоторого различия в физических постоянных одного и того же напряжения H для растяжения и изгиба. Поэтому, вообще говоря, желательно было бы иметь таблицу физических величин всех материалов не только для основных нагрузок—растяжения и сжатия, но также и для изгиба и кручения (срез представляется явлением

недостаточно определенным, ибо от него отчасти разгружают силы трения, возникающие в плоскостях среза).

Практика строительства учитывает это некоторое различие постоянных при выборе допускаемых напряжений.

Решающей, основной величиной, за которой должен все время следить конструктор, является m — запас прочности; но часто выбор m заменяется выбором $H_д$ и $T_д$ для разных случаев действия нагрузки.

Для этой цели можно допускаемые напряжения H и T детализировать на отдельное случаи растяжения, сжатия, изгиба, кручения, среза. Так всегда делается в курсах Деталей Машин.

Ниже приводится таблица допускаемых напряжений Баха (табл. X). В ней графа a обозначает спокойную неизменяемую нагрузку P (случай чрезвычайно редкий), b — нагрузку $0,P$ и c — нагрузку $P,0,—P$; напряжения в $\mathrm{kg\,cm^{-2}}$.

См. также таблицы допускаемых напряжений в курсе: *А. И. Сидоров, Детали Машин.*

Американская практика запас прочности m представляет как произведение нескольких множителей

$$m = a \cdot b \cdot c \cdot d. \tag{84}$$

Здесь a — отношение временного сопротивления к пределу упругости:

$$a = \frac{H_0}{H_a}. \tag{85}$$

Для большинства материалов этот фактор близок к 2; для никкелевой стали и некоторых других специальных сталей, подвергнутых предварительной термической обработке, он близок к $1^1/_2$.

Второй фактор b выражает характер нагрузки. Для спокойной, мертвой (dead) нагрузки он равен 1; для нагрузки $0, P$ $b = 2$ и для нагрузки $P, 0, — P$ $b = 3$.

Фактор c выражает самый способ приложения нагрузки. Если нагрузка прикладывается постепенно, $c = 1$ (статическая нагрузка); если она прикладывается вся полностью мгновенно (динамическая безударная нагрузка), $c = 2$. При динамической ударной нагрузке (падающая нагрузка и т. п.) $c > 2$.

Последний фактор d есть так называемый коэффициент незнания (factor of ignorance). Он должен соединить в себе все то, чего мы или точно не знаем в материале или не можем заранее предвидеть относительно самых нагружений. Могут быть пороки материала, случайные добавки нагрузки, будущие пристройки и т. д. Минимальное d принимается $\backsim 1^1/_2$ при хорошем знании нагрузок, надежном материале. Для чугуна $d = 2$. Часто d может быть больше.

Минимальные значения коэффициента m приведены в табл. XI.

ТАБЛИЦА X.

Допускаемые напряжения по Баху.

Род напряжения		Сварочное железо		Литое железо		Литая сталь		Стальное литье		Чугун		Закаленная сталь для рессор
		от	до	от	до	от	до	от	до	от	до	
Растяжение	*a*	900	1 200	900	1 500	1 200	1 800	600	1 200	270	330	—
	c	600	800	600	1 000	800	1 200	400	800	180	220	—
	b	300	400	300	500	400	600	200	400	90	110	—
Сжатие	*a*	900	1 200	900	1 500	1 200	1 800	900	1 500	720	1 000	—
	b	600	800	600	1 000	800	1 200	600	1 000	540	660	—
Изгиб	*a*	900	1 200	900	1 500	1 200	1 800	750	1 200	См. примечание 1.		7 500
	b	600	800	600	1 000	800	1 200	500	800			5 000
	c	340	400	300	500	400	600	250	400			—
Сдвиг	*a*	720	960	720	1 200	960	1 440	480	960	—	—	—
	b	480	640	480	800	640	960	320	640	—	—	—
	c	240	320	240	400	320	480	160	320	—	—	—
Кручение	*a*	360	480	600	1 200	900	1 440	480	960	См. примечание 2.		6 000
	b	240	320	400	800	600	960	320	640			4 000
	c	120	160	200	400	300	480	160	320			—

Примечание 1. Для чугуна допускаемые напряжения изгиба берутся по допускаемым напряжениям растяжения, умноженным на: 2,05 для круглого сечения; 1,70 для прямоугольного сечения; 1,45 для двутаврового I; 2,15 для двутаврового H.

Примечание 2. Для чугуна допускаемые напряжения сдвига берутся по допускаемым растяжения, умноженным на: 1,00 для круглого сечения; 0,80 для круглого и элептического полого; 1,00—0,25 для эллиптического сплошного; 1,40—1,60 для двутаврового, углового, крестового и швеллерного сечений.

ТАБЛИЦА XI.

Минимальные значения запаса прочности m.

Материал	a	b	c	d	m
Чугунное и прочее литье . .	2	1	1	2	4
Литое железо, мягкая сталь	2	1	1	$1^1/_2$	3
Термически обработанная никкелевая сталь	$1^1/_2$	1	1	$1^1/_2$	$2^1/_4$
Закаленная сталь	$1^1/_2$	1	1	2	3
Медь, прокатанная или прокованная	2	1	1	$1^1/_2$	3

ТАБЛИЦА XII.

Допускаемые напряжения для дерева в kgcm^{-2}.

(Дерево в безукоризненном состоянии, высушенное).

Порода дерева	Растяжение	Сжатие	Изгиб.	Сдвиг
Дуб	100	80	100	10
Ель	90	50	90	8
Пихта	80	50	80	8
Сосна	100	60	100	10

Влияние температуры на временное сопротивление и удлинение показано на фиг. **147—151**.

Две первые диаграммы получены Бахом. Последние три взяты из обширной работы проф. Уайт (A. E. White, *University of Michigan*). Кривые показывают, что, вообще говоря, сталь при повышении температуры сначала несколько увеличивает временное сопротивление на растяжение, но после 300° С оно резко падает.

То же наблюдается у железа.

Литература.

Велихов П. А. Строительная Механика. Москва—1914.

Велихов П. А. Теория Инженерных Сооружений. Выпуск I. Москва—1924.

Дружинин С. И. Теория Сопротивления Материалов. Ленинград—1923.

Калинников И. А. Материаловедение. Москва—1910.

Кирпичев В. Л. Сопротивление Материалов. Часть I. Ленинград—1916.

Кирпичев В. Л. Сопротивление Материалов. Часть II. Ленинград—1918.

Митинский Н. Н. Строительная Механика. Сопротивление Материалов. Выпуск I. Ленинград—1911.

Подольский И. С. Строительная Механика. Часть I. Сопротивление Материалов. Москва—1924.

Проскуряков Л. Д. Строительная Механика. Часть I. Сопротивление Материалов. Москва-Ленинград—1925.

Тимошенко С. П. Курс Сопротивления Материалов. Москва-Ленинград—1923.

Тимошенко С. П. Курс Теории Упругости. Часть I. Ленинград—1914.

Тимошенко С. П. Курс Статики Сооружений. Часть I. Выпуск 1. Ленинград—1922.

Труды Русск. О-ва Испытания Материалов в Москве. Том II. Москва—1913.

Худяков П. К. Сопротивление Материалов. Части I и II. Москва—1909.

Худяков П. К. Сопротивление Материалов. Москва—1923.

Bach C. Elastizität und Festigkeit. Berlin—1920.

Burr W. H. The elasticity and resistance of the materials of engineering. New-York—1915.

Föppl A. Vorlesungen über technische Mechanik. Band. III. Festigkeitslehre. Leipzig-Berlin—1922.

Gesteschi Th. Hölzerne Dachkonstructionen, ihre Ausbildung und Berechnung. 1923.

Higher steam pressures and temperatures. National Electric Light Association, New-York—1924.

Unwin W. C. The testing of materials of construction. London—1888.

Vierendeel A. Cours de stabilité des constructions. Tome I. Résistance des Matériaux. Louvain-Paris—1920.

Wood V. A treatise on the resistance of materials. New-York—1875.

Wehnert E. Die Lehre von der zusammengesetzten Festigkeit. Berlin—1920.

Сводка формул теоретической части.

$C = \frac{dP}{dF}$. Общее выражение полного (суммарного) напряжения. (1)

$T = T_1$. Парность тангенциальных напряжений. (2)

$H = \frac{P}{F}$. Уравнение напряжений при равномерном растяжении. (3)

$T = \frac{Q}{F}$, Равномерно распределенное касательное напряжение. (4)

$T = \frac{Q}{mnF_з}$. Уравнение напряжений заклепок. (4 а)

$F = mnF_з$. Срезающаяся площадь заклепок. (5)

$\frac{R}{\delta d} = H_{сред}$. Среднее напряжение смятия полуцилиндра. (6)

$H_{max} = \frac{4}{\pi} \cdot H_{сред}$. Максимальное напряжение смятия полуцилиндра. (7)

$\frac{\lambda}{l} = e$ Относительное удлинение (укорочение). (8)

$\lambda = \frac{Pl}{EF}$. Абсолютное удлинение (укорочение). (9)

$\frac{a}{h} = \operatorname{tg} \varphi = \backsim \varphi$ (по малости угла). Относительный сдвиг. (10)

$a = \frac{Qh}{GF}$. Абсолютный сдвиг. (11)

$H = Ee$. (12)
$T = G\varphi$. (13)
Закон Гука.

$G = \left(\frac{3}{8} \text{ до } 0{,}4\right) E$. Соотношение модулей упругости. (14)

$m = \frac{H_0}{H_д}$. Запас прочности нормальный. (15)

$m = \frac{T_0}{T_д}$. Запас прочности касательный. (15 а)

$S_x = \int_F y\,dF = F \cdot \bar{y}$; (16)
$S_y = \int_F x\,dF = F \cdot \bar{x}$. (16 а)
Статический момент площади.

$J_x = \int_F y^2\,dF = F \cdot r_y^2$; (17)
$J_y = \int_F x^2\,dF = F \cdot r_x^2$. (17 а)
Осевой момент инерции площади.

$J_0 = \int_F \varrho^2 dF = \int_F (x^2 + y^2)\, dF = J_x + J_y$. Полярный момент инерции площади. (18)

$J_{xy} = \int_F xy\, dF$. Центробежный момент площадй. (19)

$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2J_{xy}}{J_y - J_x}$. Два угла между случайными осями инерции и одной из главных. (20)

$J_{1,2} = 0$. Свойство главных осей инерции. (21)

$J_u = J_1 \operatorname{cs}^2\alpha + J_2 \operatorname{sn}^2\alpha$. Момент инерции относительно оси, составляющей угол α с главной осью 1. (22)

$J_v = J_1 \operatorname{sn}^2\alpha + J_2 \operatorname{cs}^2\alpha$. То же—с главной осью 2. (23)

$J_u + J_v = J_1 + J_2 = Const$. Сумма осевых моментов инерции постоянна.

$J_{uv} = \frac{1}{2}(J_1 - J_2) \operatorname{sn} 2\alpha$. Центробежный момент относительно осей, составляющих угол α с главными. (24)

$\operatorname{tg} 2\alpha_1 = \frac{J_x - J_y}{2J_{xy}}$. (25)

$J_{uv\,max} = \frac{1}{2}(J_1 - J_2)$. Максимум центробежного момента фигуры. (26)

$J_{45} = \frac{1}{2}(J_x + J_y) - J_{xy}$. Уравнение для нахождения центробежного момента. (27)

$J_x = J + Fa^2$. Параллельное перенесение оси инерции (28)

Центральные осевые моменты инерции.

$J = \frac{bh^3}{12}$ — прямоугольника; (29)

$J = \frac{a^4}{12}$ — квадрата; (30)

$J = \frac{bh^3}{36}$ — треугольника. (31)

$J_0 = \frac{\pi d^4}{32} = \infty\, 0{,}1 d^4$. Полярный момент инерции круга относительно центра. (32)

Центральные осевые моменты инерции:

$J = \frac{J_0}{2} = \frac{\pi d^4}{64} = \infty\, 0{,}05 d^4$ — круга; (33)

$J_1 = \frac{\pi a^3 b}{4} = \infty\, 0{,}785\, a^3 b$ (34)

$J_2 = \frac{\pi a b^3}{4} = \infty\, 0{,}785\, a b^3$ (34 а)

— эллипса.

$J_0 = \frac{\pi}{32}(D^4 - d^4) = \frac{\pi D^4}{32}(1 - c^4) = \infty\, 0{,}1 D^4 (1 - c^4)$. Полярный момент инерции кольцевой площади. (35)

$c = \frac{d}{D}$. (36)

$J = \frac{\pi D^4}{64}(1 - c^4) = \infty\, 0{,}05 D^4 (1 - c^4)$. Осевой центральный момент инерции кольцевой площади. (37)

Моменты инерции—удобные, готовые выражения для замены интегрирований определенного типа, возникающих при расчетах брусьев. В Сопротивле-

нии Материалов они — геометрические величины. Никакого скрытого смысла, кроме облегчения писания, моменты инерции не имеют.

См. фигуры 45—93 II-й части.

$T = G\varphi = G\varrho\alpha.$ (38)

$\alpha = \frac{M_к}{GJ_0}$. Удельный угол закручивания. (39)

$T = \frac{M_к \cdot \varrho}{J_0}$. Уравнение напряжений при кручении круглого цилиндра. (40)

$T_{max} = \frac{M \cdot r}{J_0} = \frac{M_к \cdot d}{2J_0}$. (41)

$T_{max} = \frac{M_к}{W_0} = \frac{M_к}{0{,}2\,d^3}$. Максимальное напряжение кручения круглого сплошного цилиндра. (41 а)

$\frac{2J_0}{d} = \frac{J_0}{\left(\frac{d}{2}\right)} = W_0,$ (42)

$W_0 = \frac{\pi d^3}{16} = \backsim 0{,}2\,d^3.$ (43)

Модуль сопротивления кручению круглого сплошного цилиндра.

$W_0 = \frac{J_0}{\left(\frac{D}{2}\right)} = \frac{\pi D^3}{16}(1 - c^4) = \backsim 0{,}2D^3(1 - c^4)$. То же—круглого пустотелого цилиндра. (44)

$T_{max} = \frac{M_к}{0{,}2D^3(1 - c^4)}$. Максимальное напряжение кручения круглого пустотелого цилиндра. (45)

$\theta = \alpha l,$ (46)

$\theta = \frac{M_к \cdot l}{GJ_0},$ (47)

$\theta = \frac{M_к \cdot l}{G \cdot 0{,}1d^4}.$ (48)

Угол закручивания круглого сплошного цилиндра.

$\theta = \frac{M_к \cdot l}{G . 0{,}1D^4(1 - c^4)}$. То же—пустотелого цилиндра. (49)

$\theta^\circ = \frac{180^\circ}{\pi} . \theta$. Переход от радиан на градусную меру. (50)

$M_к = 71620 \frac{N}{n}$ kgcm; (51)

$M_к = 716{,}2 \frac{N}{n}$ kgm. (51 а)

Крутящий момент вала.

$d = \sqrt[3]{\frac{358100}{T}} \cdot \sqrt[3]{\frac{N}{n}} = A\sqrt[3]{\frac{N}{n}}$. Диаметр вала, рассчитанный по напряжению. (52)

$A = \sqrt[3]{\frac{358100}{T}}.$ (53)

$d = 12\sqrt[4]{\frac{N}{n}}$. Диаметр вала, рассчитанный по допустимому удельному углу закручивания. (54)

Внутренне-внешние соотношения при изгибе прямого бруса:

$Q = R_a + U.$ (55)

$\Sigma Y_{левых} + \Sigma Y_{правых} = 0.$ (56)

$\Sigma Y_{левых} = -\Sigma Y_{правых}.$ (56 а)

$$\Sigma Z_{\text{растяжения}} + \Sigma Z_{\text{сжатия}} = 0. \qquad (57)$$

$$\Sigma M_{\text{внутр}} - \Sigma M_{\text{внеш}} = 0. \qquad (58)$$

Деформации прямого бруса при изгибе:

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}\theta. \qquad (59\text{ a})$$

$$\frac{dy}{dx} = \theta. \qquad (59)$$

$$\theta = \frac{dy}{dx}. \qquad (60)$$

$$\operatorname{tg}\theta = \theta. \qquad (60\text{ a})$$

$$e = \frac{y}{\varrho}. \qquad (61)$$

$H = E\dfrac{y}{\varrho}$. Закон Гука для изгиба прямого бруса. (62)

$M = \dfrac{EJ}{\varrho}$. Основное соотношение изгиба прямого бруса. (63)

Жесткость $= EJ$ (64)

$H = \dfrac{My}{J}$. Уравнение нормальных напряжений при поперечном изгибе. (65)

$$\left.\begin{aligned} \frac{J}{h_1} &= W_1, \\ \frac{J}{h_2} &= W_2. \end{aligned}\right\}$$ Модуль сопротивления прямого бруса изгибу. (66)

$$\left.\begin{aligned} H_{max\,1} &= \frac{M}{W_1}, \\ H_{max\,2} &= \frac{M}{W_2}. \end{aligned}\right\}$$ Расчетное напряжение изгиба прямого бруса. (67)

Модуль сопротивления—специальная геометрическая величина, годная только для определенных—крайних—точек сечения бруса; вычисляется лишь по окончательному полному моменту инерции всего сечения; свойством суммы не обладает.

Модули сопротивления:

$W = \dfrac{bh^2}{6}$ — прямоугольника; (68)

$W = \dfrac{a^3}{6}$ — квадрата; (69)

$$\left.\begin{aligned} W_1 &= \frac{bh^2}{24}. \\ W_2 &= \frac{bh^2}{12} \end{aligned}\right\}$$ — треугольника; (70)

$W = \dfrac{\pi d^3}{64} = \backsim 0{,}1d^3$ — круга; (71)

$$W_a = \frac{\pi a^3 b}{4} : a = \frac{\pi a^2 b}{4} = \backsim 0{,}785\ a^2 b, \qquad (72)$$

$$W_b = \frac{\pi a b^3}{4} : b = \frac{\pi a b^2}{4} = \backsim 0{,}785\ a b^2 \qquad (73)$$

— эллипса;

$$W = \frac{\pi D^4}{64}(1 - c^4) : \frac{D}{2} = \frac{\pi D^3}{32}(1 - c^4) = \backsim 0{,}1 D^3 (1 - c^4) \qquad (74)$$

— круглой кольцевой площади.

$$Q = \frac{dM}{dx}. \qquad (75)$$

Теорема Шведлера.

$$\varrho = \frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}}. \qquad (76\text{ a})$$

Радиус кривизны.

$$\varrho_{балки} = \frac{1}{\frac{d^2y}{dx^2}}. \qquad (76)$$

$$EJ\frac{d^2y}{dx^2} = \pm M. \qquad (77)$$

Дифференциальное уравнение упругой линии.

$$y_{вниз} \ldots\ldots\ EJ\frac{d^2y}{dx^2} = -M; \qquad (77\text{ a})$$

$$y_{вверх} \ldots\ldots\ EJ\frac{d^2y}{dx^2} = M \qquad (77\text{ b})$$

То же с указанием знака уравнения.

$$1\ \text{tnm}^3 = 1000000000\ \text{kgcm}^3. \qquad (78)$$

$$1\ \text{tnm}^2 = 10000000\ \text{kgcm}^2. \qquad (79)$$

$$\theta_C = \theta_A - \frac{1}{EJ}\int_{AC} M dx. \qquad (80)$$

Основное уравнение графоаналитического способа.

Нахождение деформаций балки графоаналитическим способом:

$$\theta = \frac{(Q)}{EJ}. \qquad (81)$$

$$y = \frac{(M)}{EJ}. \qquad (82)$$

$$\theta_A = \frac{(A)}{EJ}; \quad \theta_B = \frac{(B)}{EJ}. \qquad (83)$$

$$(Q) = 0. \qquad (84)$$

Уравнение для нахождения неповернутого сечения.

$$T = \frac{QS}{Jb}. \qquad (85)$$

Тангенциальное напряжение при поперечном изгибе прямого бруса.

То же для отдельных случаев сечений:

$$T_{средн} = \frac{Q}{bh} = \frac{Q}{F}; \qquad (86)$$

$$\beta_{прямоуг} = \frac{T_{max}}{T_{средн}} = \frac{3}{2}; \qquad (87)$$

$$T_{max\ прямоуг} = \frac{3}{2}\cdot\frac{Q}{bh} = \frac{3}{2}\cdot\frac{Q}{F} \qquad (88)$$

прямоугольника;

$$T_{max} = \frac{3}{2} \cdot \frac{Q}{F};\quad (89)$$

$$\beta_{треугольн} = \frac{3}{2}\quad (90)$$

} треугольника;

$$\bar{y} = \frac{b^3}{12 \cdot F_b}$$ — координата центра тяжести кругового и эллиптического сегмента; (91)

$$T_{max} = \frac{4}{3} \cdot \frac{Q}{F_{круга}};\quad (92)$$

$$\beta_{круга} = \frac{4}{3}\quad (93)$$

} круга;

$$T_{max} = \frac{4}{3} \cdot \frac{Q}{F_э};\quad (94)$$

$$\beta_{эллипса} = \frac{4}{3}\quad (95)$$

} эллипса;

$$T_{max} = \frac{16\, Q(1+c+c^2)}{3\pi(1-c^4)D^2};\quad (96)$$

$$\beta_{кольцев.\ площ.} = \frac{4}{3} \cdot \frac{1+c+c^2}{1+c^2}\quad (97)$$

} круглой кольцевой площади;

$$T_{max} = \frac{9}{8} \cdot \frac{Q}{F};\quad (98)$$

$$\beta_{ромба} = \frac{9}{8}\quad (99)$$

} ромба;

$$J = \frac{bh^3 - h_1^3(b-b_1)}{12};\quad (100)$$

$$T_{max} = \frac{Q}{8Jb_1}\left[bh^2 - bh_1^2 + b_1h_1^2\right];\quad (101)$$

$$\beta_{двутавра} = \frac{3}{2} \cdot \frac{b\left(1 - \frac{h_1}{h} + \frac{b_1h_1}{bh}\right)\left(1 - \frac{h_1^2}{h^2} + \frac{b_1h_1^2}{bh^2}\right)}{b_1\left(1 - \frac{h_1^3}{h^3} + \frac{b_1h_1^3}{bh^3}\right)};\quad (102a)$$

$$\frac{b_1}{b} = B \quad \text{и} \quad \frac{h_1}{h} = H;\quad (102b)$$

$$\beta_{\substack{двутавра\\ швеллера}} = \frac{3}{2} \cdot \frac{(1-H+BH)(1-H^2+BH^2)}{B(1-H^3+BH^3)}\quad (102)$$

} двутавра, швеллера.

Графическое нахождение изгиба прямого бруса:

$$M = Rh = \mu H.\quad (103a)$$

$$M^{\text{tnm}} = \mu^{\text{mm}}\, H^{\text{mm}}\, [P]^{\frac{\text{tn}}{\text{mm}}}\, [l]^{\frac{\text{m}}{\text{mm}}}.\quad (103)$$

$$y^{\text{m}} = \eta^{\text{mm}}\, (H)^{\text{mm}}\, [l]^{\frac{\text{m}}{\text{mm}}}\, [\Omega]^{\frac{\text{tnm}^2}{\text{mm}}}\, \frac{1}{EJ}^{\text{tn}^{-1}\text{m}^{-1}}.\quad (104)$$

$$\theta = k^{\text{mm}} \cdot [\Omega]^{\frac{\text{tn m}^2}{\text{mm}}} \cdot \frac{1}{EJ}^{\text{tn}^{-1}\text{m}^{-1}}\quad (105)$$

$$\frac{d^2\mu}{dx^2} = -\frac{q}{H}.\quad (106)$$

$$\mu H = Const. \qquad (107)$$

$$y^{\mathrm{m}} = \frac{\overset{\mathrm{mm}}{\eta} \cdot [l]^{\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{mm}}}}{n}. \qquad (108)$$

$$S^{\mathrm{cm}^3} = \mu^{\mathrm{mm}} \cdot H^{\mathrm{mm}} \cdot [l]^{\frac{\mathrm{cm}}{\mathrm{mm}}} \cdot [F]^{\frac{\mathrm{cm}^2}{\mathrm{mm}}}. \qquad (109)$$

$$J^{\mathrm{cm}^4} = 2\overset{\mathrm{mm}}{H} \cdot \overset{\mathrm{mm}^2}{\Phi} \cdot [F]^{\frac{\mathrm{cm}^2}{\mathrm{mm}}} \cdot \left([l]^{\frac{\mathrm{cm}}{\mathrm{mm}}}\right)^2. \qquad (110)$$

$$x' = b - \frac{f(b)}{f'(b)}, \qquad (111)$$

$$x' = a - \frac{f(a)}{f'(a)}, \qquad (112)$$

$$x'' = x' - \frac{f(x')}{f'(x')}. \qquad (113)$$

Способ Ньютона нахождения приближенного корня уравнения.

$$\left.\begin{aligned} f(x)\cdot f''(x) &> 0 \quad \text{выпукла}, \\ f(x)\cdot f''(x) &< 0 \quad \text{вогнута}. \end{aligned}\right\} \qquad (114)$$

$$x' = a + \frac{(b-a)\cdot f(a)}{f(a) - f(b)}. \qquad (115)$$

Способ reguli falsi.

Решение статически неопределимых балок I класса:

$$(M)_B = 0. \qquad (116)$$

$$\left.\begin{aligned} (A) &= 0, \\ (B) &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad (117)$$

$$M_A = -\frac{Pb\,(l^2 - b^2)}{2l^2}. \qquad (118)$$

$$M_{A_{\text{сосредот.}}} = -\frac{1}{2l^2}\left[Pb\,(l^2 - b^2) - Rc\,(l^2 - c^2) + Uf\,(l^2 - f^2)\right]. \qquad (118\,\text{a})$$

$$M_{Aq} = -\frac{1}{2l^2}\int_b^c qx\,(l^2 - x^2)\,dx. \qquad (119)$$

$$M_A = -\frac{M_B}{2} + M_{A_{\text{сосредот.}}} + M_{A\,q}. \qquad (120)$$

Решение статически неопределимых балок II класса:

$$\left.\begin{aligned} M_A &= -\frac{Pab^2}{l^2}, \\ M_B &= -\frac{Pa^2b}{l^2}. \end{aligned}\right\} \qquad (121)$$

$$\left.\begin{aligned} M_{A\,\text{сосредот.}} &= \frac{1}{l^2}\left(-Paf^2 + Rgc^2 - Ukb^2\right), \\ M_{B\,\text{сосредот.}} &= \frac{1}{l^2}\left(-Pa^2f + Rg^2c - Uk^2b\right). \end{aligned}\right\} \qquad (121\,\text{a})$$

$$\left.\begin{aligned} M_{Aq} &= -\frac{1}{l^2}\int\limits_a q x (l-x)^2\, dx, \\ M_{Bq} &= -\frac{1}{l^2}\int\limits_a^b q x^2 (l-x\; dx. \end{aligned}\right\} \qquad (122)$$

$$\left.\begin{aligned} M_A &= M_{A\ \textit{сосредот.}} + M_{Aq}, \\ M_B &= M_{B\ \textit{сосредот.}} + M_{Bq}. \end{aligned}\right\} \qquad (123)$$

$$\left.\begin{aligned} M_{A\ \textit{пары}} &= -\frac{M}{l^2}\, b(2a-b), \\ M_{B\ \textit{пары}} &= +\frac{M}{l^2}\, a(2b-a). \end{aligned}\right\} \qquad (124)$$

Инфлюентные линии:

$y_A = A = \frac{l-x}{l}$. Инфлюентная линия опорной реакции балки. (125)

$Q_F = Py_1 - Ry_2 + Uy_3$. Подсчет суммарной величины помощью инфл. линии. (126)

$Q_F = q$. (*площ. инфл. лин.*). Уравнение для равномерной нагрузки. (127)

$y_{M_F} = Bb = \frac{bx}{l}$. Инфлюентная линия момента. (128)

$y_{M_F} = Aa = \frac{l-x}{l} \cdot a$. То же. (128 a)

$y_{M_{max}} = \frac{ab}{l}$. (129)

$M = \frac{P}{l}\left(\frac{l^2}{4} - x^2\right)$. Объемлющая. (130)

$x = \frac{l}{2} - \frac{ar}{2(R+r)}$. Опасное положение тележки крана на крановой балке. (131)

$y_{M_A} = \frac{x(l^2-x^2)}{2l^2}$. I класс. (132)

$$\left.\begin{aligned} y_{M_A} &= \frac{x(l-x)^2}{l^2}, \quad (133) \\ y_{M_B} &= \frac{x^2(l-x)}{l^2}. \quad (133) \end{aligned}\right\} \text{ II класс.}$$

$\theta_C = \theta_A - \frac{1}{E}\int\limits_{AC} \frac{M}{J}\, dx$. Графоаналитический способ для прямого бруса переменного сечения. (134)

$H_\partial = \frac{P + Fl\gamma}{F} = \frac{P}{F} + l\gamma$. Расчетное уравнение на растяжение с собственным весом. (135)

$\lambda_\gamma = \frac{\gamma}{E} \cdot \frac{l^2}{2} \cdot \frac{F}{F} = \frac{Gl}{2EF}$. Удлинение от собственного веса. (136)

Кручение прямоугольной призмы:

$$\frac{T_h}{T_b} = \frac{h}{b} \cdot \tag{137}$$

$$T_h = \frac{M_к}{\frac{2}{9} \cdot b^2 h} \cdot \tag{138}$$

$$T_b = \frac{M_к}{\frac{2}{9} \cdot bh^2} \cdot \tag{139}$$

Точная формула для T_h:

$$T_h = \frac{M_к}{\mu b^2 h} \cdot \tag{140}$$

$$\theta = \frac{M_к \cdot l}{G\alpha b^3 h} \cdot \tag{141}$$

$$\gamma = \frac{T_b}{T_h} \cdot \tag{142}$$

Кручение эллиптического цилиндра:

$$T_{max} = T_a = \frac{M_к}{\frac{\pi a b^2}{2}} \cdot \tag{143}$$

$$T_b = \frac{M_к}{\frac{\pi a^2 b}{2}} \cdot \tag{144}$$

$$\theta = \frac{M_к \cdot l(a^2 + b^2)}{G\pi a^3 b^3} = \frac{4\pi^2 M_к \cdot l J_{0э}}{GF^4}; \tag{145}$$

$$J_{0э} = \frac{\pi a b}{4}(a^2 + b^2) = \frac{F}{4}(a^2 + b^2). \tag{146}$$

Напряжения поперечного сечения:

$H = \frac{P}{F} + \frac{M_x \cdot y}{J_x} + \frac{M_y \cdot x}{J_y} + H_{Мк}$. Суммарное нормальное напряжение. (147)

$T_{изгиба} = \sqrt{\left(\frac{Q_x \cdot S_x}{J_x \cdot b_x}\right)^2 + \left(\frac{Q_y \cdot S_y}{J_y \cdot b_y}\right)^2}$. То же—тангенциальное от изгиба. (148)

$T = T_{изгиба} \leftrightarrow T_к$ Тангенциальное полное. (149)

$C = \sqrt{H^2 + T^2}$. Суммарное, см. форм. (1). (150)

$N = H \operatorname{sn}^2\alpha - T \operatorname{sn} 2\alpha$. Нормальное напряжение в косой плоскости; угол между плоскостями действия N и H равен $90° - \alpha$. (151)

$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2T}{H}$. Два угла между плоскостью напряжений H и T и главными плоскостями. (152)

$$B = \sqrt{H^2 + 4T^2}. \tag{153}$$

$$H_1 = N_{max} = N_1 = \frac{H+B}{2} = \frac{H}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{H^2+4T^2}.$$ Главное напряжение max. (154)

$$H_2 = N_{min} = N_2 = \frac{H-B}{2} = \frac{H}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{H^2+4T^2}.$$ Главное напряжение min. (155)

$$K = -\frac{H}{2}\operatorname{sn}2\alpha + T\operatorname{cs}2\alpha.$$ Тангенциальное напряжение в косой плоскости; угол между плоскостями действия K и T равен α. (156)

$$\operatorname{tg}2\alpha_1 = -\frac{H}{2T}.$$ (157)

$$T_{\substack{max\\min}} = \pm\frac{1}{2}\sqrt{H^2+4T^2}.$$ Максимальное тангенциальное напряжение. (158)

$$T_{1,2} = 0.$$ Свойство главных плоскостей. (159)

$$N = H\operatorname{sn}^2\alpha + m\operatorname{cs}^2\alpha - T\operatorname{sn}2\alpha.$$ См. (151). (160)

$$\operatorname{tg}2\alpha = \frac{2T}{H-m}.$$ См. (152). (161)

$$B = \sqrt{(H-m)^2+4T^2}.$$ (162)

$$H_1 = N_1 = \frac{H+m}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{(H-m)^2+4T^2}.$$ См. (154). (163)

$$H_2 = N_2 = \frac{H+m}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{(H-m)^2+4T^2}.$$ См. (155). (164)

$$K = \frac{m-H}{2}\operatorname{sn}2\alpha + T.\operatorname{cs}2\alpha$$ См. (156). (165)

$$\operatorname{tg}2\alpha_1 = \frac{m-H}{2T}.$$ (166)

$$T_{\substack{max\\min}} = \pm\frac{1}{2}\sqrt{(H-m)^2+4T^2}.$$ См. (158). (167)

$$N = H_1\operatorname{cs}^2\alpha + H_2\operatorname{sn}^2\alpha,$$ (168)

$$T = (H_1 - H_2)\operatorname{sn}\alpha\operatorname{cs}\alpha.$$ (169)

Выражение напряжений в косой плоскости через главные; α—угол между плоскостью действия напряжений N и T и плоскостью действия главного напряжения H_1.

$$x = H_1\operatorname{cs}^3\alpha + H_2\operatorname{sn}^2\alpha\operatorname{cs}\alpha + (H_1 - H_2)\operatorname{sn}^2\alpha\operatorname{cs}\alpha = H_1\operatorname{cs}\alpha.$$ (170)

$$y = H_1\operatorname{cs}^2\alpha\operatorname{sn}\alpha + H_2\operatorname{sn}^3\alpha - (H_1 - H_2)\operatorname{sn}\alpha\operatorname{cs}^2\alpha = H_2\operatorname{sn}\alpha.$$ (171)

$$\frac{x^2}{H_1^2} + \frac{y^2}{H_2^2} = 1.$$ Уравнение эллипса напряжений. (172)

$$\frac{y^2}{H_2^2} + \frac{z^2}{H_3^2} = 1.$$ (172 a)

$$\frac{x^2}{H_1^2} + \frac{z^2}{H_3^2} = 1.$$ (172 b)

$$\frac{x^2}{H_1} + \frac{y^2}{H_2} = \pm 1;$$ (173)

$$\frac{x^2}{H_1} - \frac{y^2}{H_2} = 1;$$

$$\frac{x^2}{H_1} - \frac{y^2}{H_2} = -1.$$ (174)

Уравнения директрисы напряжений.

$\operatorname{tg} MPA = \frac{\sqrt{N}}{MP} = \frac{\sqrt{N} \cdot \sqrt{N}}{T} = \frac{N}{T}$. Угол касательной к директриссе с ее радиусом-вектором. (175)

$\frac{x^2}{H_1^2} + \frac{y^2}{H_2^2} + \frac{z^2}{H_3^2} = 1$. Уравнение эллипсоида напряжений. (176)

$N = H \operatorname{cs}^2 \alpha$, (177)
$T = H \operatorname{sn} \alpha \operatorname{cs} \alpha$. (178)
Напряжения в косой плоскости в линейном напряженном состоянии: α—см. (168) и (169).

$$T = H \operatorname{sn} 45^\circ \operatorname{cs} 45^\circ = \frac{H}{2}.$$

Пространственные деформации:

$\frac{V_{нов}}{V_{стар}} = \frac{Fl(1+e)(1-\sigma e)^2}{Fl} = 1 + e - 2\sigma e$. (179)

$\frac{V_{нов}}{V_{стар}} = 1 + 2(1-\sigma)(e_x + e_y)$. (180)

$\frac{V_{нов}}{V_{стар}} = 1 + (1-2\sigma)(e_x + e_y + e_z)$. (181)

$\frac{E}{G} = \frac{2\varphi}{e}$. См. (14). (182)

$\varphi = e(1+\sigma)$. Основное общее соотношение чрезвычайной важности—между относительной линейной деформацией по заданному направлению e и соответствующим ей относительным сдвигом φ (см. фиг. 222). (183)

$E = 2(1+\sigma) \cdot G$. См. (14). (184)

$e = \frac{H_1}{E} - \frac{\sigma H_2}{E}$. (185)

$H_c = Ee = H_1 - \sigma H_2$. (186)

$H_c = \frac{1-\sigma}{2}(H+m) + \frac{1+\sigma}{2}\sqrt{(H-m)^2 + 4T^2}$. Формула Сен-Венана. См. (188)—(189а). (187)

$H_c = \frac{3}{8}(H+m) + \frac{5}{8}\sqrt{(H-m)^2 + 4T^2}$. (188)

$H_c = 0{,}35(H+m) + 0{,}65\sqrt{(H-m)^2 + 4T^2}$. (188 а)

$H_c = \frac{3}{8}H + \frac{5}{8}\sqrt{H^2 + 4T^2}$. (189)

$H_c = 0{,}35\,H + 0{,}65\sqrt{H^2 + 4T^2}$. (189 а)

$H = \pm\frac{P}{F} \pm \frac{P_1}{F_1} \pm \frac{P_2}{F_2} \pm \ldots;$ (190)

$H = \pm\frac{P}{F} \pm \frac{M}{W};$ (191)

$H = \pm\frac{M}{W} \pm \frac{M_1}{W_1}$. (192)

Сложное нормальное напряжение.

$W_0 = 2W$. Соотношение модулей сопротивления для круга. (193)

Расчет круглого вала:

$$H_c = \frac{\frac{3}{8}M + \frac{5}{8}\sqrt{M^2 + M_к^2}}{W}. \qquad (194)$$

$$H_c = \frac{M_c}{W}. \qquad (195)$$

$$M_c = \frac{3}{8}M + \frac{5}{8}\sqrt{M^2 + M_к^2}. \qquad (196)$$

$$d = \sqrt[3]{\frac{10M_c}{H\partial}} = 2{,}15\sqrt[3]{\frac{M_c}{H\partial}}. \qquad (197)$$

$$T_{max} = \frac{1}{2W}\sqrt{M^2 + M_к^2}. \qquad (198)$$

$$T_{max} = \frac{H_{max}}{2}. \qquad (199)$$

$$H_{max} = \frac{\sqrt{M^2 + M_к^2}}{W}. \qquad (200)$$

$$M_T = \sqrt{M^2 + M^2}. \qquad (201)$$

$$H_{max} = \frac{M_T}{W}. \qquad (202)$$

$$d = \sqrt[3]{\frac{10M_T}{H\partial}} = 2{,}15\sqrt[3]{\frac{M_T}{H\partial}}. \qquad (203)$$

$$M_T = \sqrt{M_в^2 + M_г^2 + M_к^2}. \qquad (204)$$

Выражение сложного напряжения через моменты существует только для одного круглого сечения.

$$H_E = M\left(\frac{a\,\mathrm{sn}\,\alpha}{J_1} + \frac{b\,\mathrm{cs}\,\alpha}{J_2}\right). \qquad (205)$$

$$H_F = -M\left(\frac{a\,\mathrm{sn}\,\alpha}{J_1} + \frac{b\,\mathrm{cs}\,\alpha}{J_2}\right). \qquad (206)$$

$$\frac{y\,\mathrm{sn}\,\alpha}{J_1} - \frac{x\,\mathrm{cs}\,\alpha}{J_2} = 0. \qquad (207)$$

Уравнение нейтральной оси в сечении.

$$\mathrm{tg}\,\alpha \cdot \mathrm{tg}\,A = \frac{J_1}{J_2}. \qquad (208)$$

A—угол наклона нейтральной оси к главной 1 — 1; α — угол наклона силовой линии к главной оси 1 — 1.

$$f = \sqrt{f_1^2 + f_2^2}. \qquad (209)$$

$$H_E = \frac{M\,\mathrm{cs}\,\gamma \cdot h_1}{J_A}. \qquad (210)$$

$$H_E = \frac{M\,\mathrm{cs}(P, f) \cdot h_1}{J_A}. \qquad (210\,a)$$

$$H_F = -\frac{M\,\mathrm{cs}\,\gamma \cdot h_2}{J_A}. \qquad (211)$$

$$H_F = -\frac{M \operatorname{cs}(P, f) \cdot h_2}{J_A}. \qquad (211\,a)$$

$$\operatorname{cs}(P, f) = \operatorname{cs}(A + \alpha - 90^\circ) = \operatorname{cs}\gamma. \qquad (212)$$

$$\left.\begin{aligned} M_1 &= Pn; \\ M_2 &= Pm. \end{aligned}\right\} \qquad (213)$$

$$H = \frac{P}{F} + \frac{M_1 y}{J_1} + \frac{M_2 x}{J_2}.$$ Напряжение неравномерного сжатия. (214)

$$1 + \frac{ny}{r_1^2} + \frac{mx}{r_2^2} = 0.$$ Уравнение нейтральной линии сечения. (215)

$$H = \frac{P}{F} + \frac{M \operatorname{cs}\gamma \cdot a}{J_A}. \qquad (216)$$

$$OF \cdot OZ = -r^{A2}.$$ Свойство радиуса инерции сечения. (217)

Формулы перевода единиц напряжения.

$$1 \frac{kg}{mm^2} = 100 \frac{kg}{cm^2}.$$

$$1 \frac{kg}{m^2} = 0{,}0001 \frac{kg}{cm^2}.$$

$$1 \frac{tn}{m^2} = 0{,}1 \frac{kg}{cm^2}.$$

$$1 \frac{kg}{cm^2} = 10 \frac{tn}{m^2} = 0{,}01 \frac{kg}{mm^2} = 10000 \frac{kg}{m^2}.$$

Алфавитный указатель.



ИЗДАТЕЛЬСТВО ОБЩЕСТВА ПОТРЕБИТЕЛЕЙ
МОСКОВСКОГО ВЫСШЕГО ТЕХНИЧЕСКОГО УЧИЛИЩА
Москва, Коровий Брод, 3; тел. 5-75-07.

Вышли из печати и поступили в продажу:

Август 1926 г.

Инж.-мех. **Е. Н. Тихомиров.** Курс сопротивления материалов. Вып. I. XVI+198 стр, с атласом чертежей с 395 фиг. М.—1926. Цена с атласом 4 р. 50 к.

Проф. **А. И. Некрасов.** Теоретическая механика. Часть I. Статика (с графостатикой). 98 стр. 102 фиг. М.—1923. Цена 1 р. 50 к.

К. Фольк (*C. Volk*). Основы конструктивной разработки машиностроительных деталей. Перевод с немецкого инж. М. В. НОСОВА. VIII+84 стр., 214 фиг. М.—1925. Цена 1 р. 15 к.

Проф. **П. К. Худяков.** Задачник по технической статике. 8 стр., 4 фиг., 33 литогр. таблицы в $^1/_8$ листа. М.—1925. Цена 1 р. 60 к.

Инж. **Н. М. Щапов.** Примеры расчетов по гидравлике. 90 стр., 144 фиг., 2 табл. М.—1924. Цена 1 р. 60 к. (распродано).

И. В. Шкарин. Номограмма для расчета двигателей постепенного сгорания. Цена 25 к.

И. И. Соколовский. Аналитическая геометрия в векторном изложении. XII+276 стр., 108 фиг. М.—1926. Цена 4 р.

Проф. **К. А. Круг.** Основы электротехники. 2-е переработанное издание. XVI+828 стр. 628 фиг. М.—1926. Цена 12 р. 50 к.

Инж. **М. А. Перекалин.** Сборник задач по теоретической электротехнике (с подробными решениями). Часть 1-я. VIII+120 стр., 79 фиг. М.—Л.—1925. Цена 1 р. 60 к.

Р. Рюденберг (*R. Rüdenberg*). Токи короткого замыкания при эксплоатации больших электрических станций. Перев. с немецкого под ред. инж. Е. В. НИТУСОВА. 48 стр. 42 фиг. М.—1926. Цена 75 к.

В. Жанкен. (*V. Genkin*). Селективная защита электрических сетей от коротких замыканий и заземлений. Перевод с французского инж. К. А. СОФИАНО под редакцией проф. Н. И. СУШКИНА. VIII+68 стр., 74 фиг. М.—1925. Цена 1 р. 15 к. (распродано).

Правила и программы работ в Электромашинной лаборатории Московского Высшего Технического Училища. М.—1924. Цена 50 к.

Проф. **Н. А. Кашкаров.** Курс водоснабжения. VIII+417 стр., 227 фиг., 1 карта. М.—1926 г. Цена 5 р. 50 к.

Проф. **Н. А. Кашкаров.** Таблицы для расчета водопроводных труб, скорости и потери напора. 8 стр. М.— 1926. Цена 20 к.

Проф. **Н. С. Стрелецкий.** Курс мостов. Металлические мосты. Предпосылки расчета и конструирования. XVI+280 стр., 232 фиг., 3 табл. М.—1925. Цена 5 р.

Проф. **М. А. Великанов.** Гидрология суши. IV+192 стр., 89 фиг. М.—1925. Цена 2 р. 50 к.

Проф. **М. Д. Соловьев.** Лекции по геодезии, читанные на инженерно-строительном факультете Московского Высшего Технического Училища. Часть I. М.—1924. Цена 4 р. (распродано).

Ц. Караогланов и М. Димитров. Систематический ход открытия и отделения кислот. Перевод с немецкого под редакцией проф. Ф. К. ГЕРКЕ. 20 стр., 1 фиг. М.—1924. Ц. 25 к.

На складе:

Проф. **П. П. Петров.** Химическая технология волокнистых материалов животного происхождения. М.—1923. Цена 3 р.

Инж. С. А. Федоров. Руководство по белению, крашению и печатанию тканей. М.—1923. Цена 2 р. 50 к.

НА СКЛАДЕ ВСЕГДА ИМЕЮТСЯ КНИГИ ПО ВСЕМ ОТРАСЛЯМ ТЕХНИКИ

Иногородние заказы исполняются наложенным платежом по получении задатка